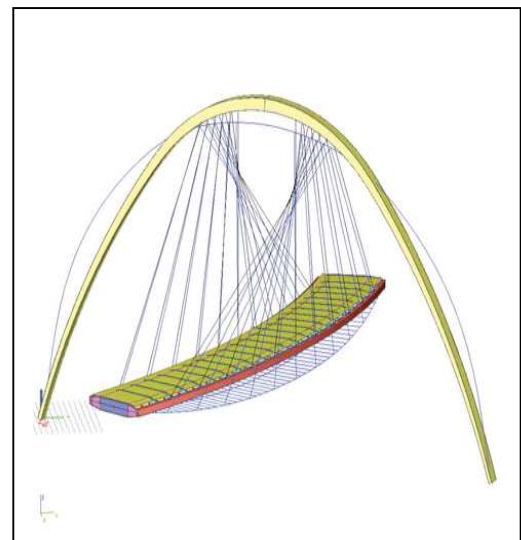
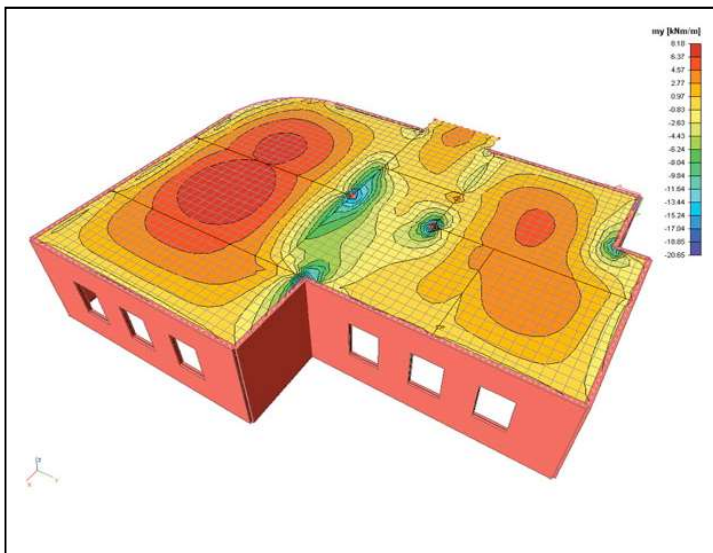
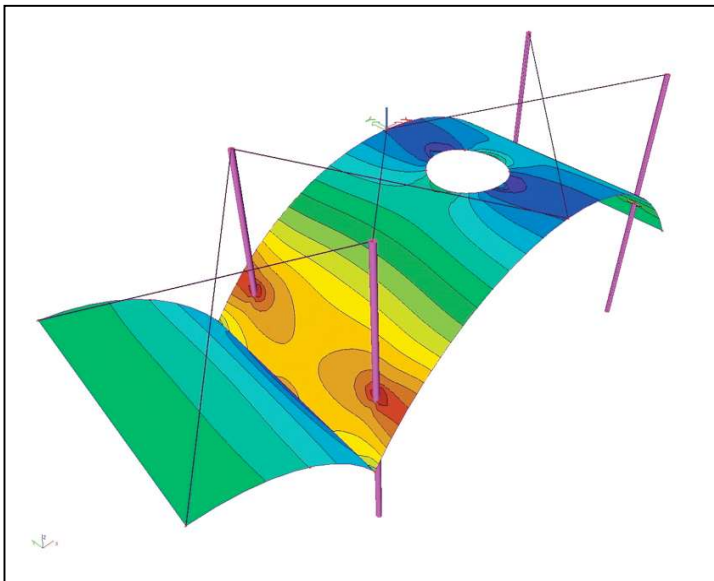




Ecole technique
de la construction Fribourg
Bautechnische Schule Freiburg

STATIQUE



Chargé de cours : **Ivan Corminboeuf** ingénieur civil ETS/EPF
Version **3.9.8** – janvier 2021

Chargé de cours

Ivan Corminboeuf

ingénieur civil diplômé ETS / EPF



Né en 1963, M. Corminboeuf est originaire de Domdidier. Après un apprentissage de dessinateur en constructions métalliques de 1979 à 1982, il poursuit sa formation à l'Ecole d'ingénieurs de Fribourg où il obtient son diplôme en 1985 en épurant. Par la suite M. Corminboeuf travaille dans le domaine des structures jusqu'en 1987. Durant la même année, il entre à l'école polytechnique fédérale de Lausanne dans la filière structure. En 1992 il termine ses études par un travail de diplôme dans les ouvrages d'art. De 1992 à 1997, il est assistant auprès de l'ICOM-EPFL pour les projets de ponts mixtes du 8^{ème} semestre. De 1999 à 2002, M. Corminboeuf enseigne le béton armé à l'école d'ingénieurs de Fribourg dans la section de génie civil. Depuis 2003, il est chargé de cours auprès de l'école de la construction de Fribourg pour les cours de statique, de résistance des matériaux et de béton armé. M. Corminboeuf travaille actuellement dans la filiale de Fribourg du groupe AF Toscano SA qui regroupe plus de 30 collaborateurs. Il est également membre du comité de la section fribourgeoise de la SIA.

i.corminboeuf@bluewin.ch

Fiche de cours

Filière :	Ecole technique de la construction
Titre du cours :	STATIQUE
Semestre(s) durant le(s)quel(s) le cours est enseigné :	1^{er} + 2^{ème} + 5^{ème} semestre

Objectifs :

Donner à l'étudiant les bases de la statique afin que ce dernier puisse maîtriser l'équilibre de corps simples et dimensionner de petites structures élémentaires de type isostatique.

Contenu :

Compréhension des notions fondamentales des conditions d'équilibre d'un corps. Recherche de l'équilibre de forces et de corps simples. Calcul des réactions d'appuis d'une structure isostatique. Calcul des efforts intérieurs dans une poutre. Recherche de l'équilibre des nœuds d'un système triangulé. Equilibre statique global, étude du glissement et du renversement d'un corps

Prérequis :

Notions de base de l'algèbre : résolutions d'équations à 2 ou 3 inconnues. Notions de base de géométrie et de trigonométrie : théorème de Pythagore, calcul du sinus, du cosinus et de la tangente d'un triangle, application du théorème du sinus et du cosinus.

Lien fort avec les cours :

Mathématique, résistance des matériaux et cours de construction relatifs au bâtiment en général.

Mode d'évaluation des connaissances :

Sous la forme de travaux écrits.

Notation = **50 points / 10 + 1** => note maximale **6** - note minimale **1**

CHAPITRES

1. INTRODUCTION
2. CONCEPTS, FORCES ET CHARGES
3. RAPPELS MATHEMATIQUES
4. FORCES CONCOURANTES COPLANAIRES
5. EQUILIBRE DES CORPS RIGIDES
6. LES EFFORTS INTERIEURS
7. LES POUTRES A TREILLIS
8. LE FROTTEMENT SEC
9. EQUILIBRE STATIQUE GLOBAL
10. DEMONSTRATION D'UN LOGICIEL DE STATIQUE
11. EXERCICES
12. ANNEXES
Extraits de la norme SIA 261 + formulaires de statique

Le cours est régulièrement mis à jour. Il peut être téléchargé à l'adresse www.corminboeuf.net

1. INTRODUCTION

La statique est une science qui a pour objet premier l'étude des forces agissant sur un corps ; cette étude se fait indépendamment du mouvement du corps ; le mouvement s'étudie par la cinématique.

En sciences appliquées, la statique couvre un domaine plus vaste. Souvent un corps est au repos, ou peut être considéré comme tel. Le problème cinématique disparaît et seul subsiste le problème statique de savoir sous quelles conditions les forces agissant sur le corps garantissent l'état de repos. La statique étudie alors les conditions d'équilibre des forces agissant sur le corps, ou, en abrégé, l'équilibre du corps (expression un peu abusive puisque équilibre n'exclut pas mouvement). Par opposition, il revient alors à la dynamique d'étudier le mouvement (cinématique + cinétique).

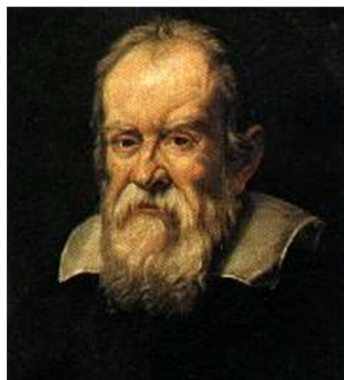
Enfin, **la statique applique ses notions aux constructions réelles ; elle schématise ces dernières, imagine le mode de transmission des forces, recherche les conditions assurant l'équilibre de tout ou partie de ces constructions et analyse le cheminement des efforts à l'intérieur des différents éléments de ces constructions.** Ainsi, la statique a pour l'ingénieur un sens et un but élargis : étudier le jeu des forces dans les constructions (indépendamment d'un éventuel mouvement). Les constructions pour lesquelles cet objectif peut être atteint par la considération du seul équilibre sont qualifiées d'isostatiques ; c'est avant tout ce type de structures qui sera envisagé dans ce cours. Dans le cas contraire, les constructions sont dites hyperstatiques (ou, mieux, indéterminées); elles nécessitent l'étude des propriétés de déformation de la matière qui les compose pour les résoudre, et ne seront pas étudiées dans ce cours.

La statique ne sera donc pas enseignée d'un point de vue purement théorique (science abstraite dérivant de la Mécanique), mais bien avec un regard constant sur les principaux problèmes qui se posent journellement aux ingénieurs (statique appliquée). Elle peut alors être considérée comme la science introductive à l'art de construire, tel que l'ingénieur doit le pratiquer. Dans cette optique, la statique est caractérisée par le fait que, d'un **petit nombre de principes et théorèmes fondamentaux**, on retire des résultats extrêmement féconds en pratique, et une grande efficacité pour résoudre des problèmes variés et importants avec un minimum de peine.

La statique est une science très ancienne, déjà connue des Egyptiens, d'Archimède (leviers) et de Léonard de Vinci. Certains considèrent **Simon Stévin, né à Bruges (B) en 1548**, comme le fondateur de la statique, ayant utilisé le premier le principe du parallélogramme des forces. Les progrès furent ensuite plus lents (**Newton, Varignon, Galilée, Bernoulli...**) et ce n'est que lorsque les ingénieurs commencèrent à faire un large usage de la statique dans l'étude de leurs constructions, et en particulier sous l'impulsion de **L. Navier (F) 1785-1836**, que la statique prit un grand essor. Par leurs ouvrages marquants, **Culmann 1864** et **Ritter 1888** professeurs à l'EPFZ, sont souvent considérés comme les fondateurs de la statique graphique "moderne". La fin du XIXe siècle et le début du XXe sont alors caractérisés par une efflorescence de travaux sur la statique, dont l'essentiel s'enseigne encore aujourd'hui. Toutefois, l'emploi toujours plus étendu de l'ordinateur pour résoudre les problèmes de statique a fait perdre beaucoup d'intérêt aux méthodes graphiques, au profit des techniques analytiques et numériques.



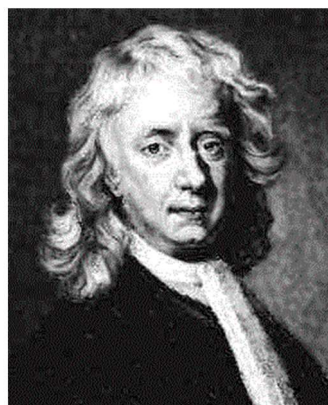
Léonard de Vinci
1452 - 1519



Galiléo Galilei
1520 - 1591



Karl Culmann
1821-1881



Sir Isaac Newton
1642 - 1727



Pierre Varignon
1654 - 1722

2. CONCEPTS, FORCES ET CHARGES

2.1 POINT MATERIEL ET SOLIDE

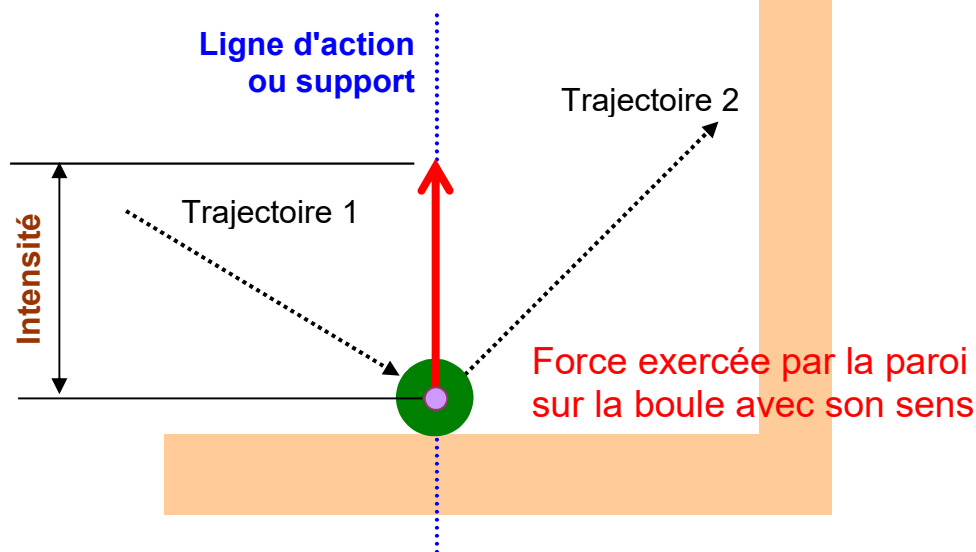
Considérons un corps de masse m , très petit, tel que les trajectoires de tous ses points soient indiscernables les unes des autres, et se réduisent donc à une courbe unique : on l'appelle point matériel. Un corps est un ensemble de points matériels. **En statique et mécanique des matériaux, on étudie essentiellement des corps solides peu déformables, que l'on appelle simplement solides. Un solide est donc un ensemble de points matériels dont les distances ne peuvent subir que de faibles variations. Le solide est dit indéformable ou rigide si ces distances restent invariables.** Le concept de point matériel est évidemment relatif à l'ampleur du mouvement. Une bille qui roule peut être assimilée à un point matériel si la trajectoire observée est grande vis-à-vis des dimensions de la bille. Quel est le mouvement d'un point matériel isolé, qui ne serait soumis à aucune influence ? Il est donné par le principe d'inertie de Galilée et Newton : un point matériel isolé a un mouvement rectiligne et uniforme (= à vitesse constante). Cette loi exprime que la matière est inerte, incapable de modifier par elle-même son état de mouvement (1^{ère} loi de Newton).

2.2 FORCE

Lorsqu'un point matériel est influencé par d'autres corps, la loi d'inertie ne s'applique plus, car l'expérience montre que le mouvement est perturbé. On dit qu'il "s'exerce des forces" sur le point matériel. En d'autres termes, la force est la cause de la modification du mouvement (et non la cause du mouvement).

La force est un concept physique qui permet d'exprimer l'action qu'exerce un corps sur un autre (et réciproquement !) ; la force se rapporte toujours à un certain corps sur lequel elle agit, n'ayant de sens que relativement à ce corps : **on ne peut imaginer une force seule, dans l'espace, détachée de tout.** La force traduit une "action" due à une "cause", elle est "provoquée" par quelque chose : on ressent le poids d'un livre dans la main à cause de l'attraction terrestre ; le vent exerce une force sur un obstacle qui s'oppose à son passage. Considérons un point matériel isolé venant heurter une paroi (boule de billard). Au moment du choc, et pendant un court instant, la boule est sous l'influence de cette paroi, qui modifie la trajectoire en exerçant une

force F. Les caractéristiques de cette force sont :



- 1 - **Son point d'application**
- 2 - **Sa ligne d'action ou son support**
- 3 - **Son sens ou sa direction**
- 4 - **Sa grandeur ou intensité**

On représente la force par une flèche de longueur proportionnelle à son intensité. On voit que, d'un point de vue mathématique, la force a les caractéristiques d'un vecteur (ici vecteur lié). On désignera ce vecteur par F et son intensité par une valeur exprimée en N ou kN.

Le système d'unités actuellement en vigueur est le système international S.I. pour lequel :

L'unité de longueur est le mètre (m),
L'unité de temps est la seconde (s),
L'unité de masse est le kilogramme (kg).
L'unité de force est le newton (N) et découle de la loi fondamentale de Newton :

$$\mathbf{F = masse * accélération}$$
$$\mathbf{1\ N = 1\ kg * 1m/s^2} \quad (a)$$

L'ancienne unité de force est le kilogramme-force (kgf), souvent abrégée kg (attention aux confusions avec la masse). C'est la force exercée par la pesanteur sur la masse unité (le "poids"), soit

$$1 \text{ kgf} = 1\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 \quad (\text{b})$$

En comparant (a) et (b), on a $1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}$ (c)

et l'on se contente souvent de $1 \text{ kgf} \approx 10 \text{ N}$ (d)

La force que l'on vient de caractériser agit ponctuellement et est dite force concentrée. **Il existe aussi des forces agissant de manière continue sur une ligne (force linéaire), une surface (force superficielle), ou un volume (force de volume).** On les désigne sous le nom de forces réparties, par exemple le poids d'un mur (N/m), la pression de l'eau ou du vent (N/m²), le poids de la matière ou poids spécifique (N/m³).

2.3 CHARGES SOLLICITANT LES CONSTRUCTIONS

On ne pourra analyser avec sûreté le jeu des forces d'une construction qu'après avoir déterminé quelles sont les charges ou actions qui sollicitent cette construction. On désigne par charges celles des forces qui sont a priori connues, ou, plus exactement, qu'il est possible de chiffrer avec une certaine précision ; elles sont dues à des phénomènes naturels (vent) ou artificiels (explosion), et provoquées par une cause directe, un contact (choc), ou à distance (pesanteur, magnétisme). On qualifie de charge toute cause provoquant un jeu de forces dans une structure, même si la charge elle-même ne peut être représentée par une force (tassement du sol ou de fondation par exemple). La détermination des charges (origine, nature), de leur intensité (moyenne, maximum probable), et de leur combinaison éventuelle, est un pas important et souvent difficile de l'étude des constructions. Le but de ce paragraphe est d'introduire le sujet, et non d'en donner une connaissance exhaustive. En général, les charges à considérer, leur mode de calcul et leur intensité maximum sont fixés par des prescriptions officielles. En Suisse, le constructeur est tenu d'appliquer les normes publiées par la **SIA (Société suisse des Ingénieurs et des Architectes)**, essentiellement les normes 260 et 261. Ces normes ne sont applicables qu'à la Suisse, et il appartient à l'ingénieur étudiant le projet d'une construction destinée à l'étranger, de se renseigner au sujet des normes qu'il doit respecter.

NB : le bureau central de la SIA est situé à Zurich. La SIA Suisse est composée de sous-groupes répartis par canton.

2.3.1 Types de charges

On distinguera d'abord les deux classes suivantes :

A - Une charge est statique si elle s'applique progressivement, sans provoquer ni choc ni vibration (par exemple : poids propre, neige).

B - Une charge est dynamique si, qu'elle s'applique brutalement ou non, elle provoque des oscillations de la construction (par exemple : train, séisme, vent).

Certaines charges de la seconde classe peuvent avoir un effet dynamique peu prononcé ; par simplicité, il est admis de les considérer comme statique après les avoir multipliées par un coefficient de majoration supérieure à 1. Ce coefficient est appelé "coefficient dynamique ou d'impact" (par exemple : véhicules routiers, trains, machines, ponts roulants).

On peut maintenant tenter une classification des charges selon les types suivants :

A - Charges mortes, permanentes, fixes ou invariables : elles comprennent avant tout le poids propre des divers éléments de la construction. Le poids propre est fréquemment la charge la plus importante agissant sur une construction, surtout pour les grandes structures faites en matériaux lourds (béton par exemple). Le poids propre est souvent utile voire nécessaire (il stabilise : barrage-poids). Avec des matériaux comme l'acier et l'aluminium, on peut réduire l'importance du poids propre vis-à-vis des autres charges ; mais jamais on ne peut le supprimer : Son calcul est aisé, mais souvent fastidieux. On retiendra les masses volumiques suivantes :

Acier	7850 kg/m³	≈ 80 kN/m³
Béton non armé	2400 kg/m³	24 kN/m³
Béton armé	2500 kg/m³	25 kN/m³
Aluminium	2700 kg/m³	27 kN/m³
Bois	600 kg/m³	6 kN/m³

L'attraction terrestre est égale à 9.81 m/s^2 sous nos latitudes. **Afin de simplifier son utilisation et les calculs, l'attraction terrestre est communément admise égale à 10 m/s^2 .** La transformation d'un poids volumique en force devient donc pour le béton armé par exemple :

$$1 \text{ m}^3 \text{ de béton} = 2500 \text{ kg/m}^3 * 10 \text{ m/s}^2 = 25'000 \text{ Newton}$$

En divisant par 1000 et en utilisant le préfixe "kilo"

on obtient 25 kilos * Newton abrégés 25 kN

Pour l'exemple, quelques valeurs de gravité sur d'autres planètes ou astres

Soleil	273.95 m/s^2	28.0 x
Lune	1.62 m/s^2	0.16 x
Mars	3.71 m/s^2	0.38 x
Saturne	10.44 m/s^2	1.06 x
Vénus	8.87 m/s^2	0.90 x
Terre	9.81 m/s^2	1.00 x

B - Surcharges, ou charges vives ou mobiles : il s'agit de toutes les surcharges qui peuvent envahir une construction (foule ; matières entreposées ; surcharges de locaux : bureaux, salles à usages divers ; véhicules ; engins et machines ...) et de toutes les actions "visibles" qui provoquent des forces (neige ; accumulation d'eau ; vent ; givre ; poussée des glaces...).

C - Charges "indirectes" ou "cachées" : par cette dénomination particulière qui n'a rien d'officielle, on signale les actions "invisibles" qui peuvent faire naître des forces dans une structure. Celles-ci peuvent être générées par ; une variation de température, un tassement d'appui, le fluage et le retrait du matériau (surtout le béton), les efforts internes suite au mode de fabrication (contraintes internes ; défauts de montage ; soudure frottements des appareils d'appui ...

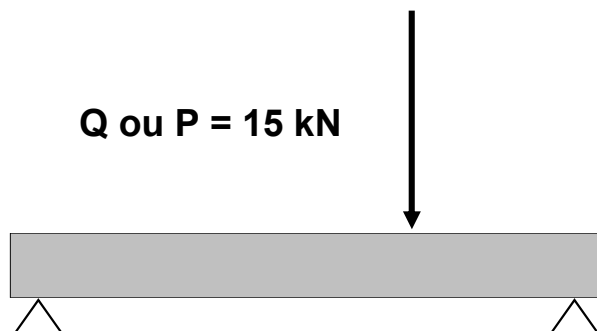
2.3.2 Modélisation des charges dans l'espace

Dans la statique on distinguera les charges en fonction de leur répartition spatiale. Dans ce cours, 3 types de charge seront utilisés :

A - Charge concentrée

Se dit d'une charge qui agit sur une très petite surface vis-à-vis de la dimension de la structure sur laquelle elle s'applique. Exemple : un poteau prenant appui sur une dalle représente une charge concentrée. On écrira cette charge avec une lettre majuscule Q ou $P = 15 \text{ kN}$. Graphiquement on schématisera la force ainsi :

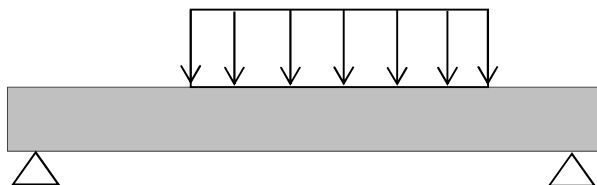
Charge concentrée



B - Charge uniformément répartie

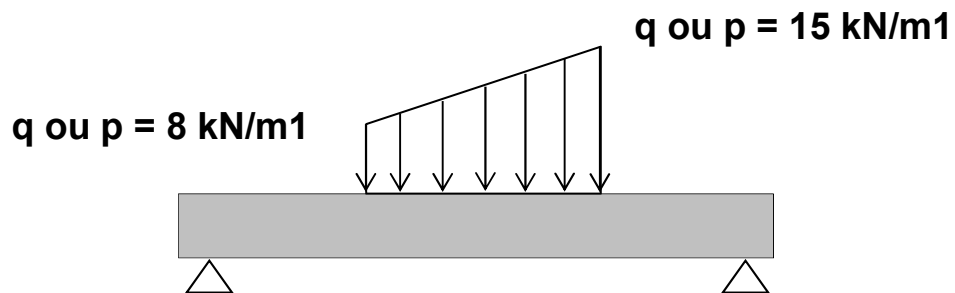
Se dit d'une charge qui est répartie de manière uniforme sur une poutre ou sur une surface. Exemple : le poids propre d'une dalle. On écrira cette charge avec une lettre minuscule $g = 5 \text{ kN/m}$ ou $g = 3 \text{ kN/m}^2$. En général, on utilisera la lettre g pour représenter le poids propre et la lettre q ou p pour représenter une charge variable. Graphiquement on schématisera la force ainsi :

$q \text{ ou } p = 5 \text{ kN/m}$



C - Charge répartie variable

Se dit d'une charge qui est répartie sur une poutre ou sur une surface et qui varie en fonction de la position où l'on se trouve. Exemple : la pression de l'eau sur un barrage. Plus on est profond, plus la pression augmente. Graphiquement on schématisera la force ainsi :



2.4 CALCUL DES CHARGES

Quelques pages de la norme SIA 261 sont jointes en annexe de ce cours. Cette norme fixe les valeurs des charges que l'ingénieur doit admettre sur une structure en fonction de son usage. **La norme SIA 261** donne en fonction de la catégorie de surface ; habitation, bureaux, école, salle de spectacle... la valeur que l'ingénieur doit prendre en compte pour le dimensionnement d'une structure. Ces valeurs sont basées sur des statistiques et les principales valeurs sont les suivantes :

Locaux d'habitation	2 kN/m2
Surfaces de vente	5 kN/m2
Bureaux et écoles	3 kN/m2
Parking	2 kN/m2

Pour déterminer l'ensemble des charges de gravité agissant sur une structure, on doit souvent avoir recours à la masse volumique des matériaux. Les principales valeurs sont :

ANNEXE A CHARGES VOLUMIQUES, CHARGES DE SURFACE ET ANGLES DE TALUS NATURELS

Tableau 30: Charges volumiques moyennes des matériaux

Matériau	Charge volumique [kN/m ³]	Matériau	Charge volumique [kN/m ³]
Aluminium	27	Maçonnerie montée sans crépi	
Acier	78,5	briques de terre cuite pleines	18
Béton		briques de terre cuite perforées	13
non armé	24	briques à haute isolation phonique	17
armé	25	briques apparentes perforées	15
Béton léger (à déterminer de cas en cas)		agglomérés de béton pleins	22
Bois		agglomérés de béton perforés	18
résineux en général	5	agglomérés isolants phoniquement	20
feuillus en général	7,5	briques silico-calcaire pleines	20
bois résineux collés	5	briques silico-calcaires perforées	18
panneaux en bois aggloméré	8	agglomérés de béton cellulaire, qualité normale	6
Maçonnerie en pierre		agglomérés de béton cellulaire, haute qualité	7
moellons (calcaire)	24	briques de verre pleines	25
granit	27	briques de verre creuses	14
basalte	30	plaques d'argile cellulaire	12
molasse, grès	24	plaques de plâtre	12
Enduits et crépis		Revêtements de sols	
mortier de chaux	19	dallage en céramique	20
mortier de ciment	22	pierre naturelle	30
mortier de plâtre	12	parquet en bois collé	8
crépis muraux extérieurs	18	linoléum	15
crépis muraux intérieurs	14	Revêtements bitumineux	
		asphalte coulé	24
		revêtement bitumineux (HMT)	24

Les valeurs indicatives de la charge volumique moyenne de la neige sur un terrain horizontal sont :

- neige fraîche 1,0 kN/m³
- neige tassée (quelques heures à quelques jours après sa chute) 2,0 kN/m³
- ancienne neige (quelques semaines à quelques mois après sa chute) 3,5 kN/m³
- neige mouillée 4,0 kN/m³
- neige fabriquée par des moyens techniques 5,0 kN/m³.

2.4.1 Calcul de la charge de neige

La norme SIA 261 donne une formule pour le calcul de la charge de neige. Celle-ci est exprimée en N/m² de surface horizontale, elle s'obtient par la relation suivante :

$$q_{\text{neige}} = \mu_i * C_e * C_T * S_k \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

μ_i = **coefficient de forme de toiture ; varie de ≈ 0.2 à 2.0**

Coefficient tenant compte de l'accumulation de la neige en fonction de la forme et de la pente de la toiture

$\mu_i \approx 0.8$ => toit conventionnel ou plat avec une pente $\leq 30^\circ$; $\mu_i \approx 1.0$ pour un bâtiment plus long ou plus large que 25m

C_e = **coefficient d'exposition de l'ouvrage au vent**

$C_e = 0.8$ => endroit fortement exposé au vent

$C_e = 1.0$ => exposition normale au vent

$C_e = 1.2$ => endroit protégé du vent

C_T = **coefficient thermique généralement égal à 1.0**

$$S_k = (1 + (H / 350)^2) * 0.4 \text{ kN/m}^2 > 0.90 \text{ kN/m}^2$$

H = altitude en m de l'endroit considéré avec correction éventuelle

Afin de tenir compte d'endroits beaucoup ou peu enneigés ; le Gothard ou la ville de Lausanne par exemple, la norme SIA 261 demande d'augmenter ou de diminuer l'altitude réelle d'une valeur variant de 100 à 500 m selon la carte de Suisse de la page suivante.

Exemple: Halle industrielle à Fribourg, altitude 685 m
inclinaison du toit 10° , toiture à 2 pans, dim. 30x18m
selon carte de la Suisse pas de modification d'altitude

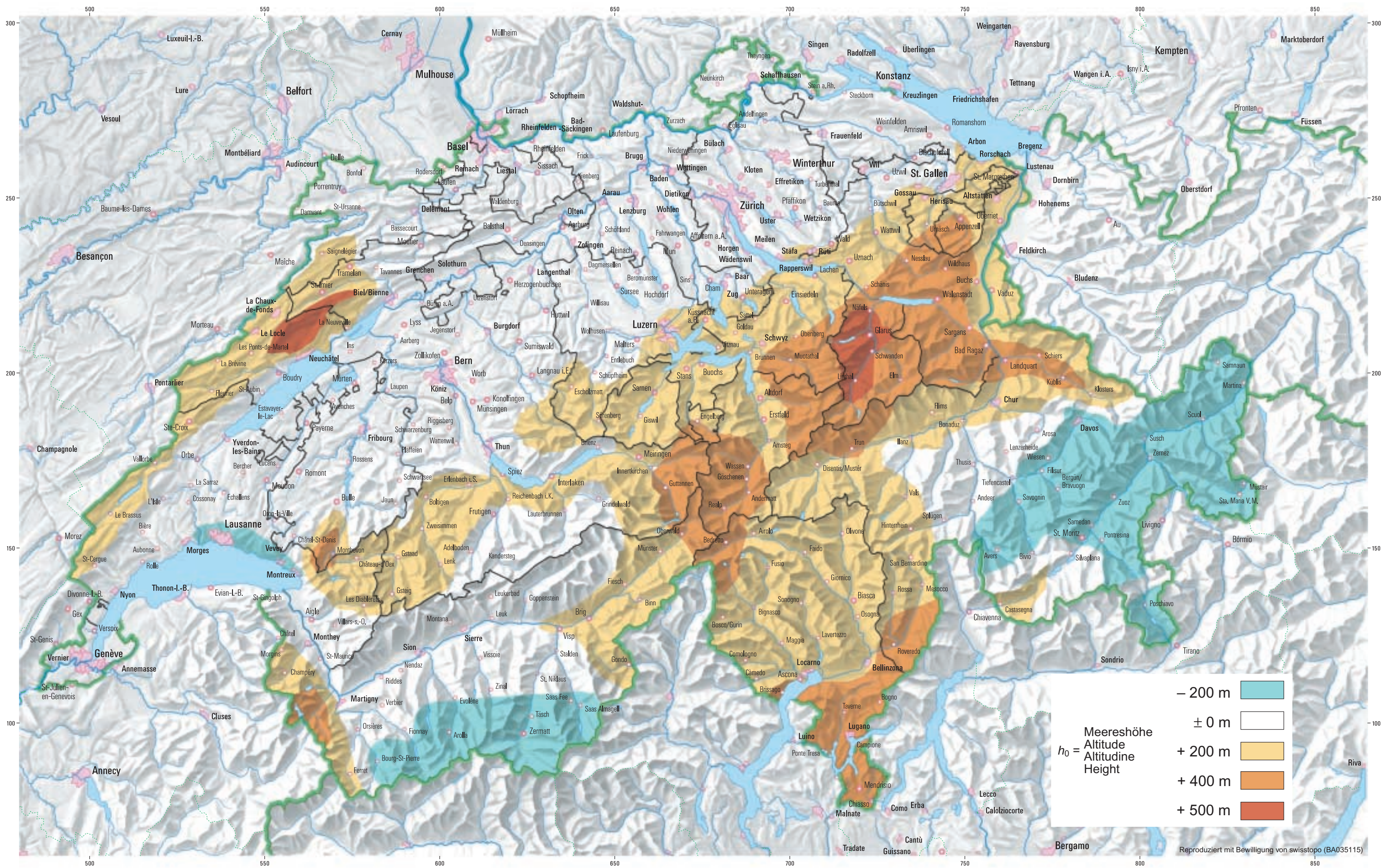
$$\Rightarrow \mu_i = 1.0 \quad \Rightarrow C_e = 1.0 \quad \Rightarrow C_T = 1.0$$

$$S_k = (1 + (685/350)^2) * 0.4 = 1.93 \text{ kN/m}^2 > 0.90 \text{ kN/m}^2$$

$$q_{\text{neige}} = 1.0 * 1.0 * 1.0 * 1.93 = 1.93 \text{ kN/m}^2$$

La charge est à répartir par m² de surface de toit horizontale !

ANNEXE D ALTITUDE DE RÉFÉRENCE POUR LES CHARGES DE NEIGE



Anhang
Annexe
Appendice
Annex

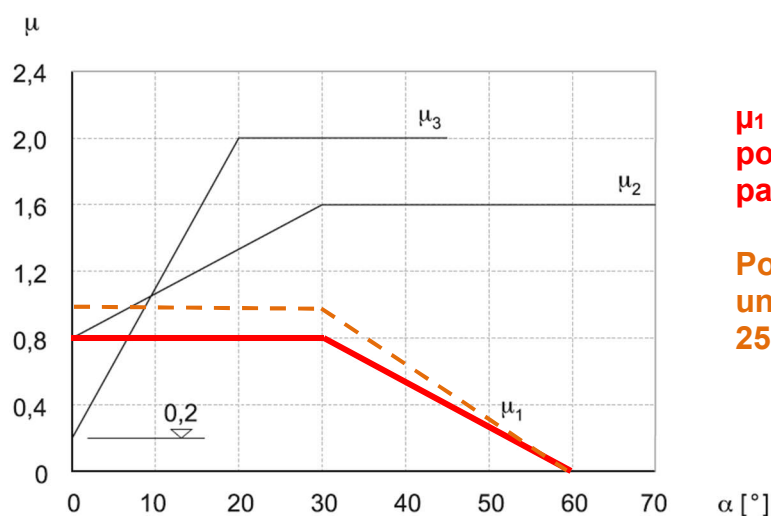
D

Bezugshöhe h_0
Altitude de référence h_0
Altitudine di riferimento h_0
Reference Height h_0

(nicht anwendbar auf Bauwerke über 2000 m Meereshöhe)
(pas applicable pour les constructions situées au-dessus de 2000 m d'altitude)
(non applicabile a costruzioni ubicate sopra 2000 m sul mare)
(not applicable for construction works at heights greater than 2000 m)



Coefficient de forme de toiture selon SIA 261



$\mu_1 = 0.8 \Rightarrow$ cas usuels pour toits plats ou à 2 pans avec une pente $< 30^\circ$

Pour un bâtiment avec une longueur ou largeur $> 25\text{m}$; $\mu_1 = 1.0$ de 0 à 30°

Figure 3: Disposition de la charge de neige sur les toitures

Modèle de charge 1			
Modèle de charge 2			
	$\mu_{11} = \mu_1(\alpha_1) \quad \mu_{12} = \mu_1(\alpha_2)$	$\mu_{2m} = \mu_2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$	$\mu_3 = \mu_3(\alpha) \quad \alpha_0 = 60^\circ$

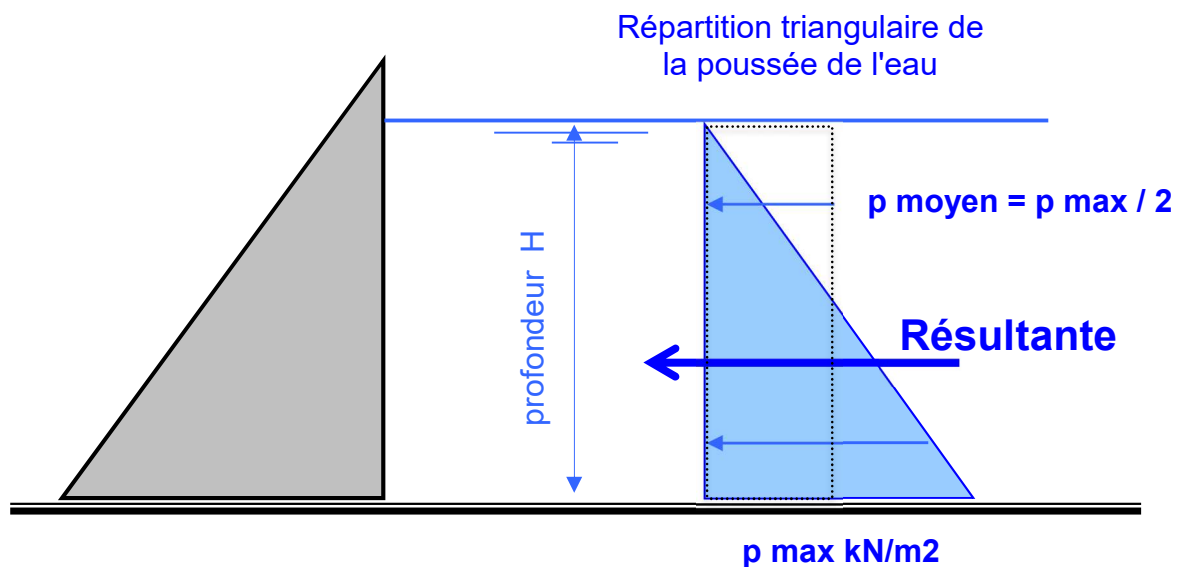
2.4.2 Calcul de la poussée de l'eau sur une paroi verticale

La pression de l'eau sur une paroi verticale est proportionnelle à la profondeur à laquelle on se trouve. La formule qui permet de calculer la pression vaut :

Pression à la profondeur H :

$$p = \text{profondeur} * \text{masse volumique eau} \quad (\text{kN/m}^2)$$

Remarque : la pression de l'eau à une profondeur donnée est équivalente **dans toutes les directions** ; le coefficient de poussée est égal à 1.



La résultante de la poussée de l'eau sur le barrage pour une tranche de 1 mètre de profondeur est égale à $R = p_{\max} / 2 * \text{Hauteur}_{\max}$ ce qui est équivalent à la surface bleue.

La position de la résultante des pressions est située à $h / 3$ depuis le fond du lac.

2.4.3 Calcul de la poussée des terres sur une paroi verticale

La pression des terrains meubles sur une paroi verticale est proportionnelle à la profondeur. Contrairement à l'eau, le coefficient de poussée des terres varie en fonction de la qualité du terrain. Il varie en moyenne de **0.3 à 0.5** lorsque le terrain pousse sur une paroi ; il s'agit alors d'une **poussée active**. Il varie de **2 à 3** lorsque le terrain retient une paroi ; il s'agit alors d'une **poussée passive ou buttée**. Les formules qui permettent de calculer les pressions valent :

Poussée active contre un mur de soutènement :

$$p = \text{profondeur} * \text{masse vol. sol} * \text{coeff. poussée actif} = (\text{kN/m}^2)$$

Poussée passive qui retient un mur de soutènement:

$$p = \frac{\text{profondeur} * \text{masse vol. sol} * \text{coeff. poussée passif}}{2 \text{ (coefficient de sécurité)}} \quad (\text{kN/m}^2)$$

Remarque: en général on prend un coefficient de sécurité d'une valeur **2** sur la valeur de la poussée passive ou buttée car cette force a souvent un effet stabilisant sur un mur de soutènement. On la prend en compte avec "prudence" par le biais du coefficient de sécurité.

Exemple : mur de soutènement

Poussée passive ou buttée

"la terre retient"

Poussée active

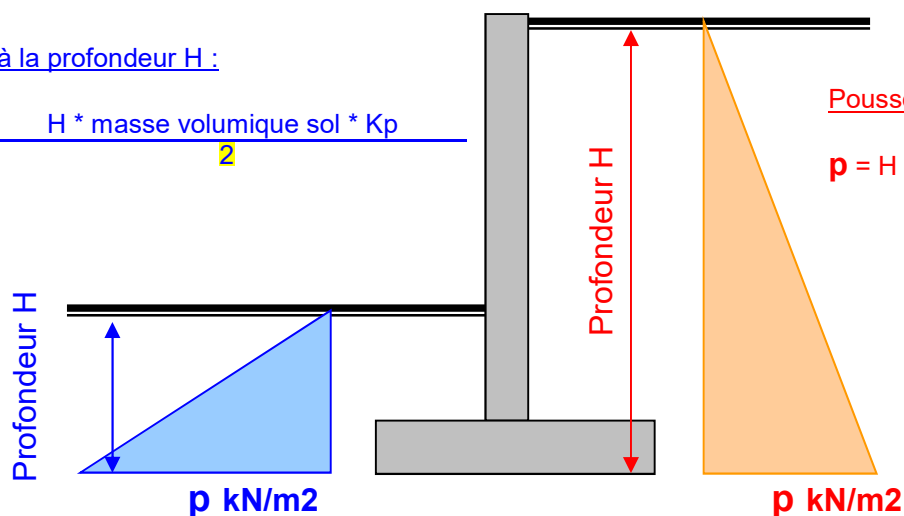
"la terre pousse"

Poussée à la profondeur H :

$$p = \frac{H * \text{masse volumique sol} * K_p}{2}$$

Poussée à la profondeur H :

$$p = H * \text{masse volumique sol} * K_a$$



ANNEXE B COEFFICIENTS DE POUSSÉE DES TERRES

Figure 16: Coefficients K_{ah} pour la composante horizontale de la poussée active des terres sur des parois verticales (selon Coulomb)

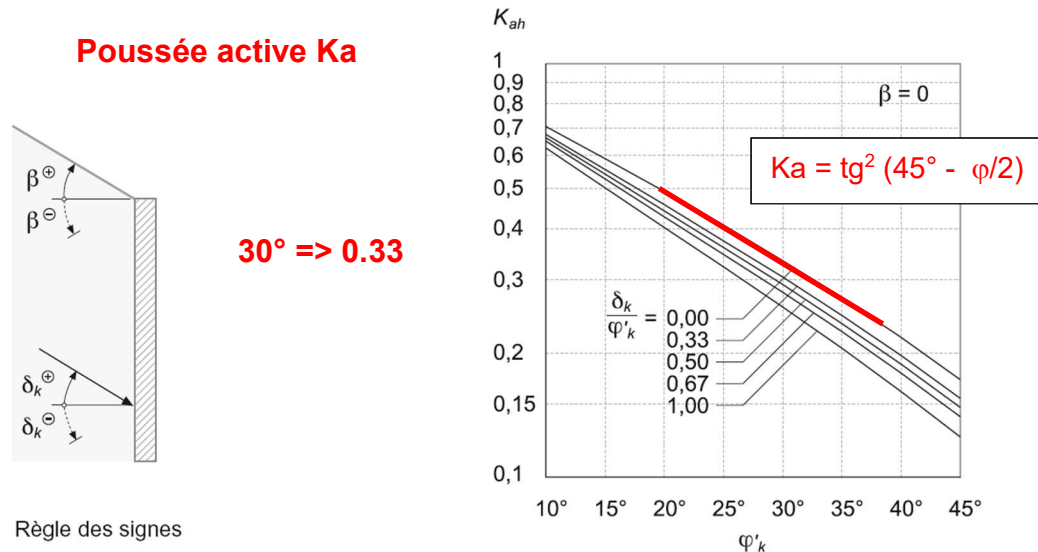
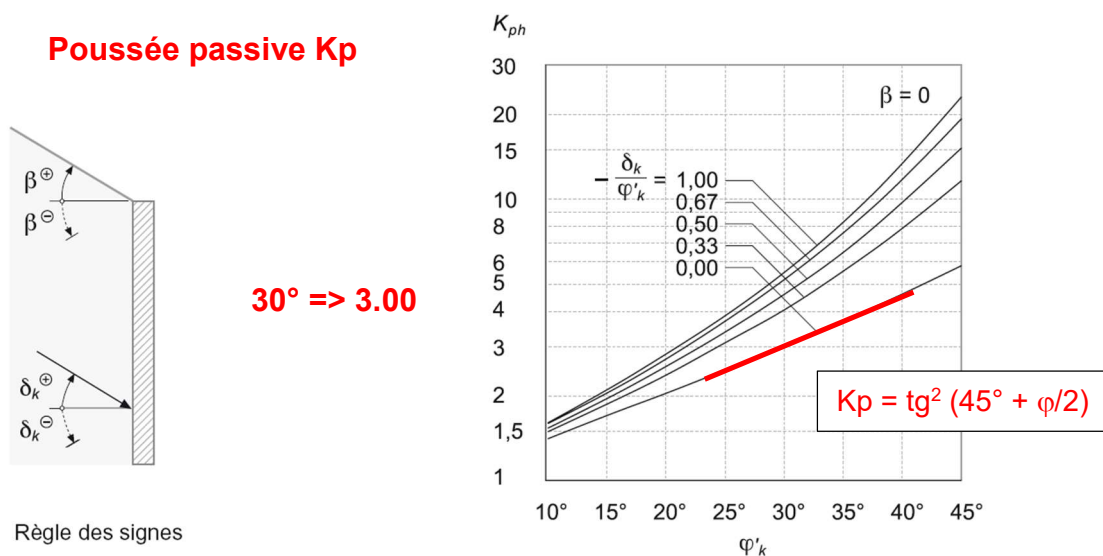


Figure 17: Coefficients K_{ph} pour la composante horizontale de la butée des terres sur des parois verticales (selon Caquot/Kérisel)



Angle de frottement interne des sols $\phi'_k \Rightarrow$ selon géologue

ϕ'_k moyen sol meuble $\approx 30^\circ$ (la grande majorité des sols de nos régions)

Bon terrain ≈ 33 à 35° (sols graveleux..)

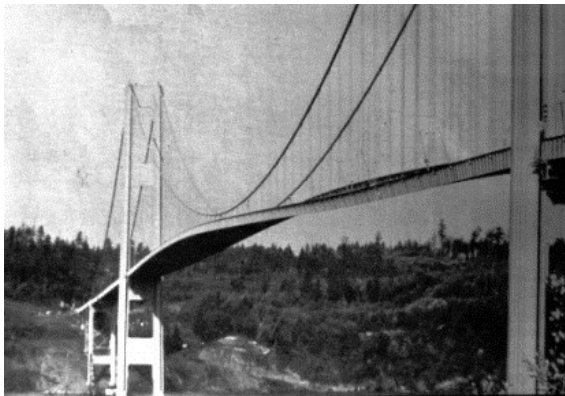
Très mauvais terrains ≈ 15 à 20° (tourbe, limons fluents...)

2.4.4 Calcul de la poussée du vent

Les effets produits par le vent sont :

A- Des pressions et des dépressions statiques sur les parois ou les toitures des bâtiments. Ces pressions ou dépressions **agissent toujours perpendiculairement à la surface de référence.**

B- Pour les constructions assez souples, les actions dynamiques du vent se traduisent par des oscillations de tout ou partie du bâtiment. Dans certains cas, le bâtiment peut entrer en **résonance ou en phase** avec les "coups" de vent. Ce phénomène est dangereux car cela a pour effet d'amplifier les forces du vent sur l'ouvrage. Le Pont suspendu de Tacoma aux USA a été détruit de cette manière en 1940.



La force du vent sur un élément de surface est fonction des conditions suivantes :

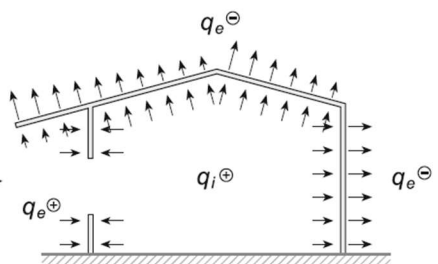
- **Situation du bâtiment ; zone urbaine, plaine dégagée...**
- **Hauteur du bâtiment**
- **Situation géographique du bâtiment ; Gothard, Valais...**

Dans le cadre de ce chapitre, nous étudions uniquement une version simplifiée du calcul de la force du vent sur une surface. La norme SIA 261 décrit de manière détaillée le calcul de la charge de vent.

La charge de vent sur une surface s'exprime par la formule suivante :

$$q_{\text{vent}} = q_{\text{base}} * C_{pe} * C_h \quad (\text{kN/m}^2)$$

a)



$q_{\text{base}} = 1.0 \text{ kN/m}^2$ => valeur moyenne du plateau suisse
force de base en fonction de la situation géographique

varie de 0.9 à 3.3 kN/m² dans les milieux très exposés

=> **voir carte de la Suisse**

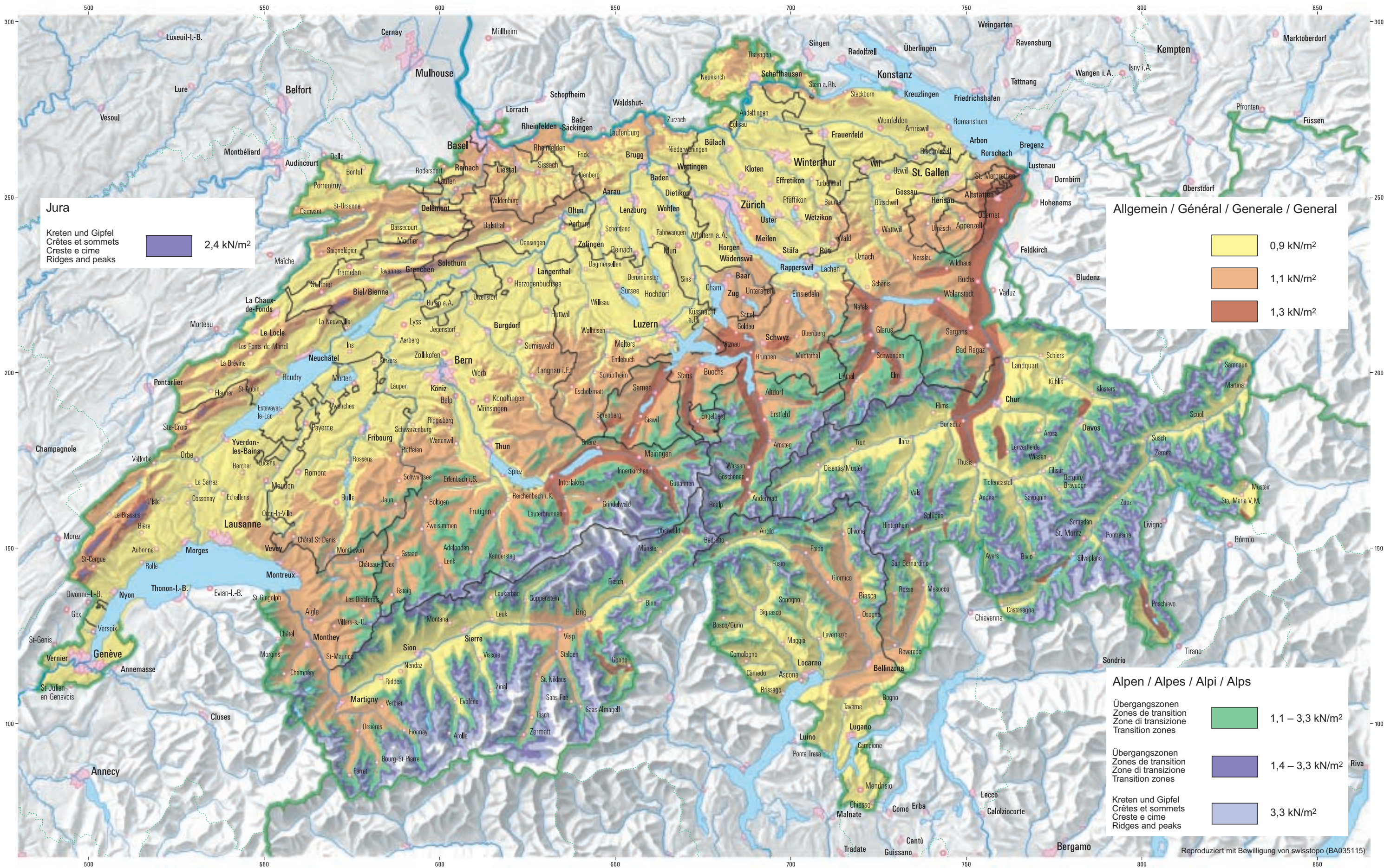
$C_{pe} =$ coefficient de pression en fonction de la forme du bâtiment et de la situation de la surface considérée dans le bâtiment ; corniche, bord du toit, angle...

=> **voir tableau en annexe**

$C_h = 1.0$ => valeur moyenne pour un bâtiment d'une hauteur $\leq 10 \text{ m}$ dans un milieu rural et dans les localités. Coefficient en fonction de la hauteur du bâtiment et de sa situation ; zone urbaine, plaine dégagée, rive de lac... varie de 0.8 à 2.5

Remarque : q_{vent} agit toujours perpendiculairement à la surface !

ANNEXE E VALEUR DE RÉFÉRENCE DE LA PRESSION DYNAMIQUE



Anhang
Annexe
Appendice
Annex

E

Referenzwert des Staudrucks
Valeur référence de la pression dynamique
Valore di riferimento della pressione dinamica
Reference value of the dynamic pressure



Exemple:

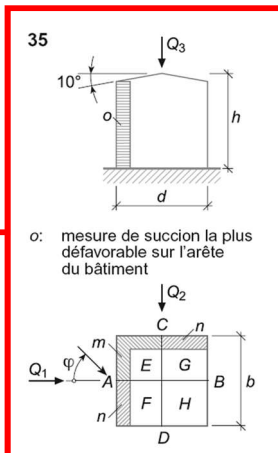
Halle industrielle à Moudon

Pente du toit 10°

Bâtiment de forme carrée

Hauteur à l'angle environ 6m

Angle du vent par rapport aux surfaces 0°



Cette halle est située dans une région sans particularité climatique ou géographique donc

$q_{base} = 0.9 \text{ kN/m}^2$ selon carte

$C_h \approx 1.0$ bâtiment avec hauteur < 10 m

Calcul de la pression du vent sur les façades A et B et sur le toit partie E, F, G et H

Tableau 35: Coefficients pour $h : b : d = 1 : 1 : 1$, pente du toit 10°

	Coefficients de pression															Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}				C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés				Surface de référence			
φ	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,96}{d \cdot h}$	$d \cdot b$
0°	0,75	-0,3	-0,75	-0,75	-1,05	-1,05	-0,4	-0,4	-1,7	-1,7	-0,8	-0,3	0,75	-0,35	-0,75	-0,75	0,9	0	-0,73
15°	0,6	-0,4	-0,5	-0,55	-1,05	-0,9	-0,35	-0,4	-1,7	-1,7	-0,85	-0,2	0,55	-0,4	-0,45	-0,55	0,86	0,05	-0,68
45°	0,4	-0,45	0,4	-0,45	-1,05	-0,6	-0,6	-0,35	-1,9	-0,7	-0,65	±0,1	0,45	-0,45	0,45	-0,45	0,74	0,85	-0,65
90°	-0,75	-0,75	0,75	-0,3	-1,05	-0,4	-1,05	-0,4	-1,7	-1,7	-0,55	-0,3	-0,75	-0,75	0,75	-0,35	0	1,05	-0,73
												$\hat{C}_{pe} = -2,0$					$C_{fr} = 0$		

Pour la façade A $q_{vent} = 0.9 \text{ kN/m}^2 * 1.0 * 0.75 = +0.68 \text{ kN/m}^2$

Pour la façade B $q_{vent} = 0.9 \text{ kN/m}^2 * 1.0 * (-0.3) = -0.27 \text{ kN/m}^2$

Pour le toit partie E ou F $q_{vent} = 0.9 \text{ kN/m}^2 * 1.0 * (-1.05) = -0.95 \text{ kN/m}^2$

Pour le toit partie G ou H $q_{vent} = 0.9 \text{ kN/m}^2 * 1.0 * (-0.4) = -0.36 \text{ kN/m}^2$

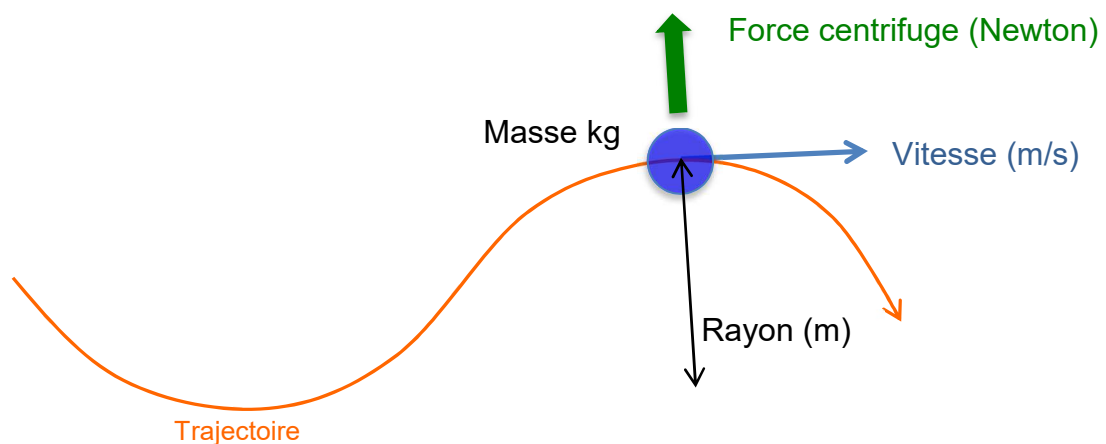
Le signe (+) indique qu'il s'agit d'une pression !
Le signe (-) indique qu'il s'agit d'une dépression !

2.4.5 Force centrifuge

La force centrifuge se manifeste lorsqu'un corps se déplace sur une trajectoire non rectiligne. Elle est indépendante des forces de gravité ; elle agit également dans l'espace. A cause des lois de la mécanique universelle, un corps qui change de trajectoire va subir une accélération vers l'extérieur de la courbe de sa trajectoire qui sera proportionnelle à sa vitesse de déplacement élevée au carré et inversement proportionnelle à la courbure de sa trajectoire soit le rayon R. La force centrifuge et la force de gravité peuvent s'additionner de manière vectorielle.

Selon la loi de Newton, une force est égale à une accélération multipliée par une masse. Nous aurons donc la relation suivante (attention aux unités !) :

$$F_{\text{centrifuge}} \text{ (Newton)} = \frac{\text{Masse d'un corps (kg)} * \text{vitesse (m/s)}^2}{\text{Rayon (m)}}$$



Exemple : Une voiture qui pèse 1250 kg circule à 85 km/h sur une route de campagne. La force centrifuge que va subir la voiture dans un virage dont le rayon est de 450 m sera de :



$$F = (1250 * (85 / 3.6)^2) / 450 = 1549 \text{ N}$$

2.4.6 Force générée par un fluide en mouvement

Qui n'a pas observé au moins une fois dans sa vie le fait que de l'eau sortant d'un jet génère une force contraire à la direction d'expulsion du fluide. Cette force issue du principe d' « Action = réaction » est le principe même qui permettra à un avion ou à une fusée de se déplacer même dans l'espace. De manière différente, cette même force mettra en mouvement une turbine ou tout autre objet.

La force générée par un fluide en mouvement soit un liquide ou un gaz est proportionnelle à :

- 1- La vitesse **V** de « sortie » du fluide en m/s
- 2- La densité du fluide δ (lettre grecque Rhô) en kg/m³
- 3- Le débit **Q** du fluide en question en m³/s

Nous obtenons la formule suivante :

$$F \text{ (Newton)} = \text{vitesse (m/s)} * \text{densité } \delta \text{ (kg/m}^3\text{)} * \text{débit m}^3\text{/s}$$

C'est cette même force qui permet au jet d'eau de Genève de s'affranchir pendant quelques instants de la force de gravité pour atteindre une hauteur de 140 mètres environ. Une pompe propulse 500 litres d'eau par seconde à plus de 200 km/h.



Exemple 1 : Force de l'eau à la base du jet d'eau de Genève

$$F = (200/3.6) * 1000 * 0.5 = 27'778 \text{ N}$$

Ce qui est équivalent à environ 2800 kg

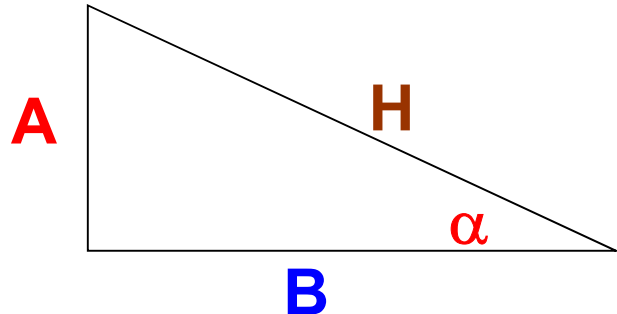
Exemple 2 : Poussée d'un moteur d'avion avec air 1.1 kg/m³,
vitesse de sortie 680 m/s, débit 55 m³/s

$$\text{Poussée} = 680 * 1.1 * 55 = 41'140 \text{ N}$$

Ce qui est équivalent à environ 4 tonnes de poussée

3. RAPPELS MATHÉMATIQUES

Triangle rectangle



Pythagore : $H^2 = A^2 + B^2$

Trigonométrie : $B / H = \cos \alpha$

$$A / B = \tan \alpha$$

$$A / H = \sin \alpha$$

Triangle quelconque

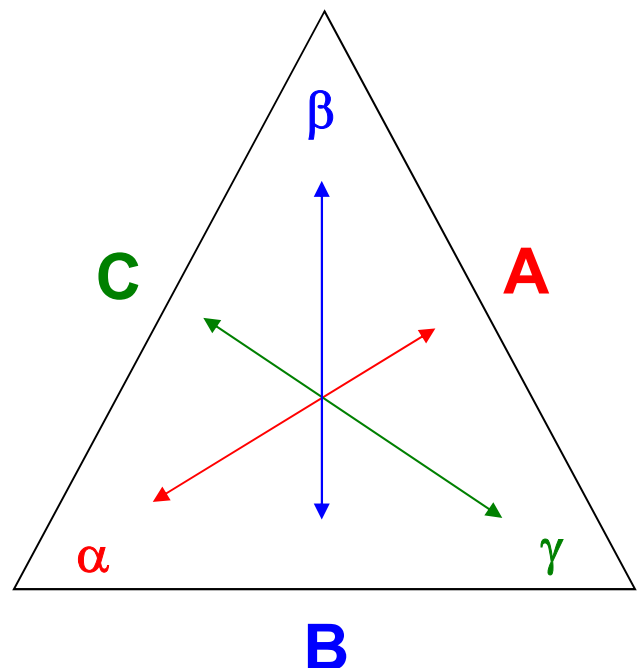
Σ Angles : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Théorème du sinus :

$$A / \sin \alpha = B / \sin \beta = C / \sin \gamma$$

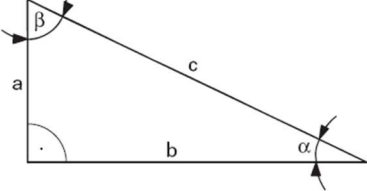
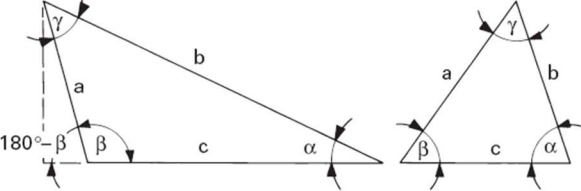
Théorème du cosinus :

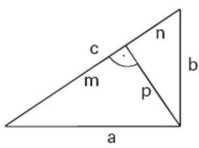
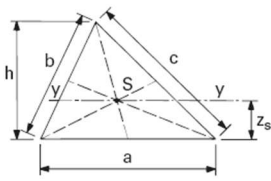
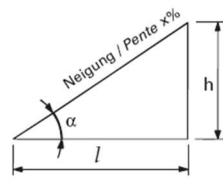
$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 BC \cos \alpha$$

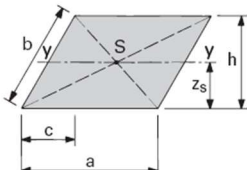
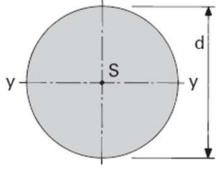
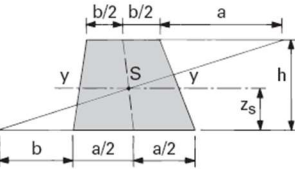
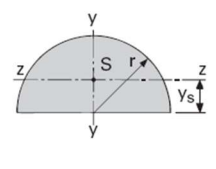
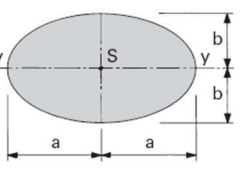
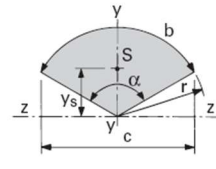
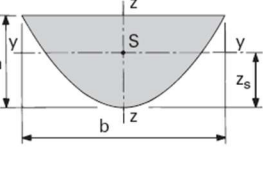
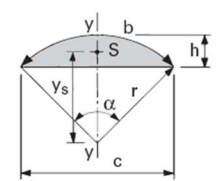
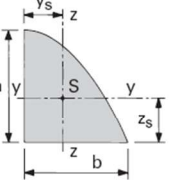
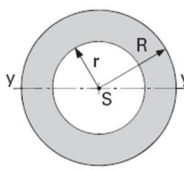
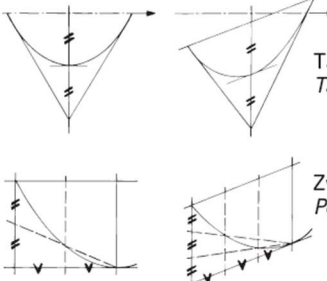
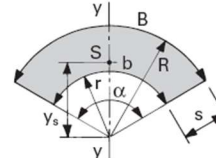


Trigonometrie

Trigonométrie

Rechtwinklige Dreiecke <i>Triangles rectangles</i>			Schiefwinklige Dreiecke <i>Triangles quelconques</i>		
					
Gesucht <i>Demandé</i>	Gegeben <i>Donné</i>	Lösung <i>Formule</i>	Gesucht <i>Demandé</i>	Gegeben <i>Donné</i>	Lösung <i>Formule</i>
a	c α	$a = c \cdot \sin \alpha$	a	b α β	$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
	c β	$a = c \cdot \cos \beta$		c α γ	$a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$
	b α	$a = b \cdot \tan \alpha$	b	a β α	$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$
	b β	$a = b \cdot \cot \beta = b \cdot \tan (90^\circ - \beta)$		c β γ	$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$
	b c	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	c	a γ α	$c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$
b	c β	$b = c \cdot \sin \beta$		a α β	$c = a \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$
	c α	$b = c \cdot \cos \alpha$		b α a	$c = b \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin^2 \alpha}$
	a β	$b = a \cdot \tan \beta$		a b γ	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma}$
	a α	$b = a \cdot \cot \alpha$		a b γ	$c = \sqrt{(a+b)^2 - 4a \cdot b \cdot \cos^2 \gamma / 2}$
	a c	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	α	a b c	$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b \cdot c}$
c	a α	$c = a / \sin \alpha$		a b γ	$\tan \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{b - a \cdot \cos \gamma}$
	b β	$c = b / \sin \beta$	β	a b α	$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$
	a β	$c = a / \cos \beta$		α β	$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
	b α	$c = b / \cos \alpha$			
	a b	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$			
α	a c	$\sin \alpha = a / c$			
	b c	$\cos \alpha = b / c$			
	a b	$\tan \alpha = a / b$			
	b a	$\cot \alpha = b / a$			
β	b c	$\sin \beta = b / c$			
	a c	$\cos \beta = a / c$			
	b a	$\tan \beta = b / a$			

Rechtwinkliges Dreieck <i>Triangle rectangle</i>	Dreieck <i>Triangle</i>	Neigung <i>Pente</i>
 $m \cdot n = p^2$ $a^2 + b^2 = c^2$	 $A = \frac{a \cdot h}{2}$ $z_s = \frac{h}{3}$ $I_y = \frac{ah^3}{36}$	 $\tan \alpha = \frac{h}{l}$ $h = l \cdot \frac{x \%}{100}$ $l = h \cdot \frac{100}{x \%}$

Parallelogramm 	Parallélogramme $A = a \cdot h$ $h = \sqrt{b^2 - c^2}$ $z_s = \frac{h}{2}$ $I_y = \frac{a \cdot h^3}{12}$	Kreis 	Cercle $A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,7854 d^2$ $U = \pi \cdot d$ $I_y = \frac{\pi d^4}{64}$
Trapez 	Trapèze $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $z_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $I_y = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + b^2 + 4ab}{a+b}$	Halbkreis 	Demi-cercle $A = \frac{\pi r^2}{2}$ $y_s = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244 r$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128}$ $I_z = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{9}{9\pi} \right)$
Ellipse 	Ellipse $A = a \cdot b \cdot \pi$ $U \approx a + b + 3 \sqrt{a^2 + b^2}$ $I_y = \pi \cdot \frac{a \cdot b^3}{4}$	Kreisausschnitt 	Secteur circulaire $A = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{\alpha r^2}{2}$ $b = \alpha \cdot r \quad c = 2 r \sin \alpha / 2$ $y_s = \frac{2r \cdot c}{3b} = \frac{4r}{3} \cdot \frac{\sin \alpha / 2}{\alpha}$ $I_y = \frac{r^4}{8} (\alpha - \sin \alpha)$ $I_z = \frac{r^4}{8} (\alpha + \sin \alpha)$
Parabelabschnitt 	Segment de parabole $A = \frac{2}{3} b \cdot h$ $z_s = \frac{3}{5} h$ $I_y = \frac{8}{175} b \cdot h^3$ $I_z = \frac{1}{30} h \cdot b^3$	Kreisabschnitt 	Segment de cercle $A = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$ $b = \alpha \cdot r \quad c = 2 r \sin \alpha / 2$ $h = r (1 - \cos \alpha / 2)$ $y_s = \frac{c^3}{12A}$ $I_y = \frac{r^4}{48} (6\alpha - 8\sin \alpha + \sin 2\alpha)$
Halber Parabelabschnitt 	Demi-segment de parab. $A = \frac{2}{3} b \cdot h$ $y_s = \frac{3}{8} b \quad z_s = \frac{2}{5} h$ $I_y = \frac{8}{175} b \cdot h^3$ $I_z = \frac{19}{480} h \cdot b^3$	Kreisring 	Couronne $A = \pi (R^2 - r^2)$ $I_y = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$
Parabel Geometrische Eigenschaften 	Paraboles Propriétés géométriques Tangenten Tangentes Zwischenpunkte Points intermédiaires	Kreisringausschnitt 	Secteur de couronne $A = \frac{B+b}{2} \cdot s$ $B = \alpha \cdot R \quad b = \alpha \cdot r$ $y_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r} \cdot \frac{\sin \alpha / 2}{\alpha}$ $I_y = \frac{(R^4 - r^4)}{8} (\alpha - \sin \alpha)$

A Fläche/Aire

U Umfang/Périmètre

S Schwerpunkt/Centre de gravité

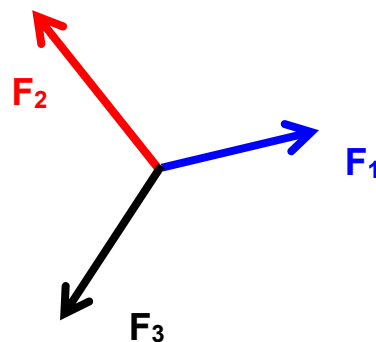
 α in Radian ($360^\circ = 2\pi$ [rad]) / en radians ($360^\circ = 2\pi$ [rad])

I Trägheitsmoment / Moment d'inertie

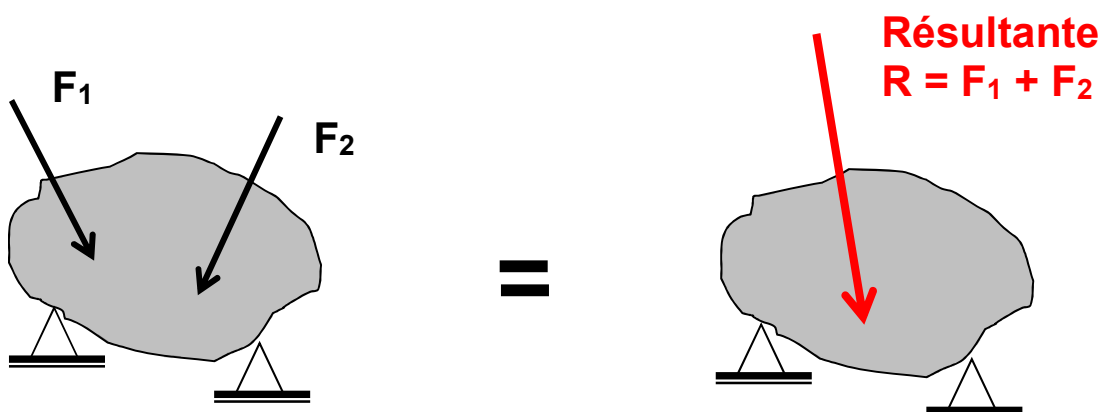
4. FORCES CONCOURANTES COPLANAIRES

4.1 DEFINITIONS

On appelle **forces concourantes coplanaires**, un système de forces ayant un même point d'application et qui sont situées dans un même plan.

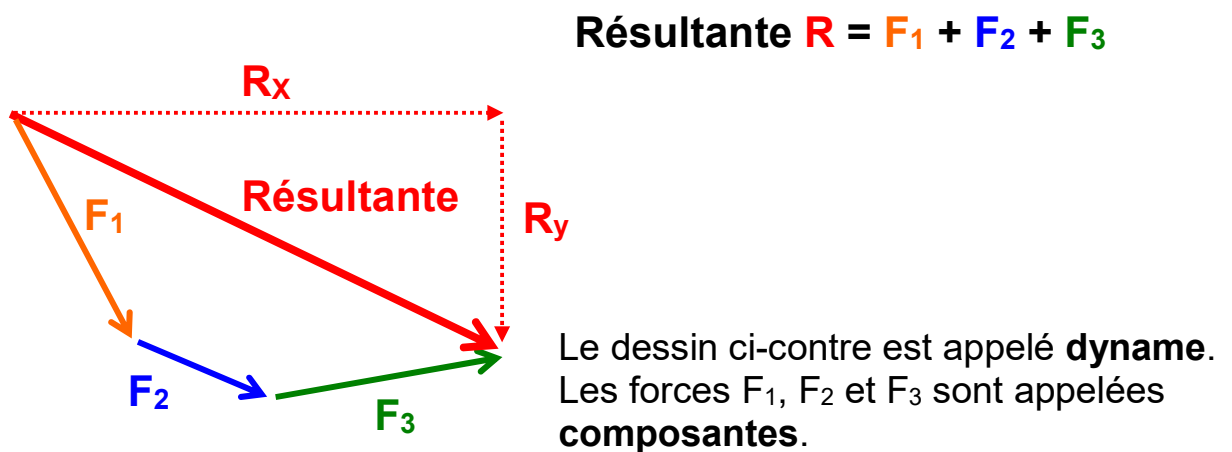


On appelle **résultante d'un système de force**, une force unique dont l'effet est équivalent au système de force donné. Ainsi, les forces agissant sur un corps peuvent être remplacées par une seule et unique force.



4.2 RESULTANTE DE DEUX OU PLUSIEURS FORCES CONCOURANTES

La résultante de 2 ou plusieurs forces concourantes et coplanaires est représentée sous la forme **graphique** en grandeur, sens et direction par la ligne séparant le pied de la première force à l'extrémité des forces mises bout à bout. La représentation des forces doit être effectuée à une échelle appropriée.



La résultante de plusieurs forces concourantes et coplanaires peut également être obtenue par la méthode algébrique. Pour ce faire, chaque force doit être définie par une **valeur**, une **direction** et par l'**angle de sa ligne d'action**.

Chaque force est décomposée dans un système d'axes X et Y selon ses composantes F_x et F_y . La composante de la résultante selon l'axe X ; R_x , est obtenu par la somme des composantes F_x des forces. Il en va de même pour la composante R_y de la résultante. Enfin, la résultante R est obtenue par le biais du théorème de Pythagore via ses composantes R_x et R_y . Afin d'éviter de faire des erreurs, il est recommandé de calculer les différents termes au moyen d'un tableau selon l'exemple ci-après.

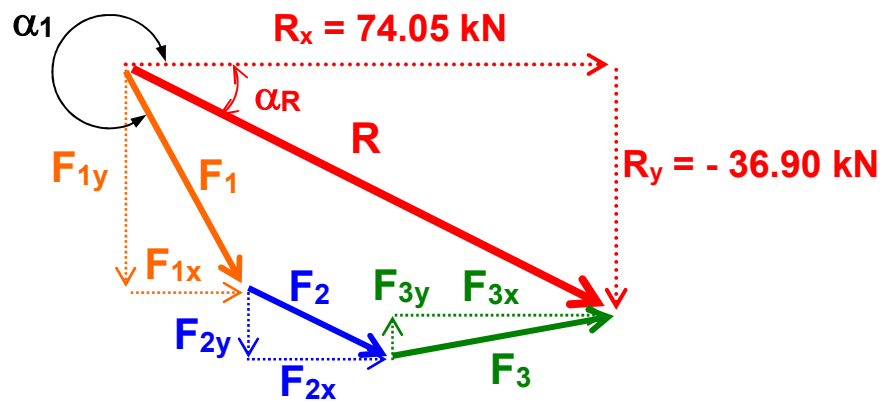
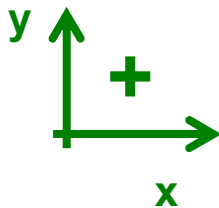
Exemple :

$F_1 = 40 \text{ kN} - \alpha_1 = 300^\circ$

$F_2 = 20 \text{ kN} - \alpha_2 = 345^\circ$

$F_3 = 35 \text{ kN} - \alpha_3 = 5^\circ$

Convention de signe



Similitude de la méthode graphique et analytique

n° force	Force kN	α°	$\cos \alpha$	$F_{ix} \text{ kN}$	$\sin \alpha$	$F_{iy} \text{ kN}$
1	40	300	0.50	20.00	- 0.87	- 34.80
2	20	345	0.97	19.40	- 0.26	- 5.20
3	35	5	0.99	34.65	0.09	3.15
Somme				74.05		- 36.90

$$\text{Résultante } R = \sqrt{74.05^2 + (-36.90)^2} = 82.7 \text{ kN}$$

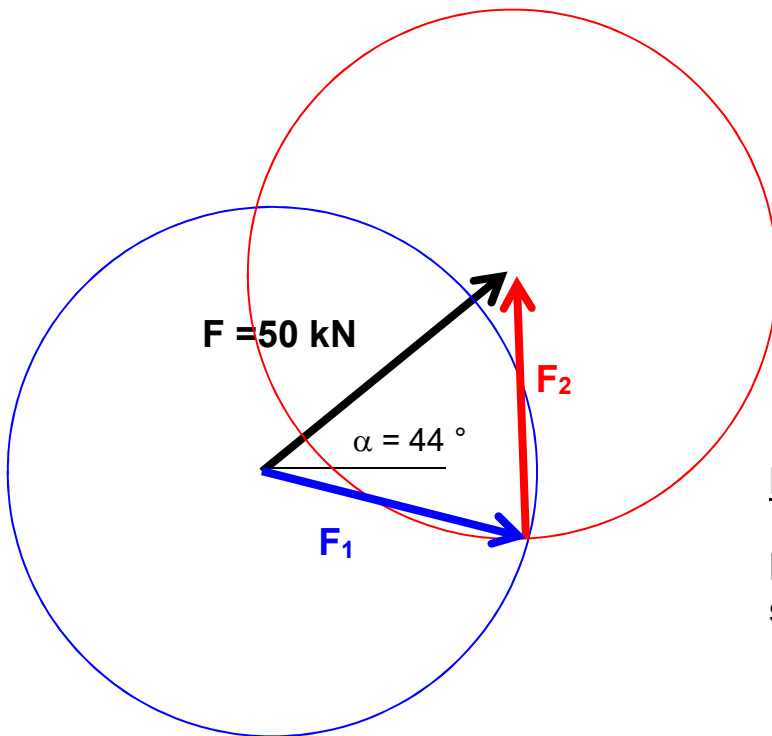
$$\text{Angle de la résultante } \alpha_R = \text{tg}^{-1} (-36.90 / 74.05) = - 26.5^\circ$$

4.3 DECOMPOSITION D'UNE FORCE

Pour les besoins d'une réflexion ou la résolution d'un équilibre, on a parfois recours à la décomposition d'une force en plusieurs composantes avec des angles ou des valeurs bien déterminés.

4.3.1 Exemple 1

Force $F = 50 \text{ kN}$ $\alpha = 44^\circ$ on cherche deux forces de même intensité



Rayon R1 = Rayon R2

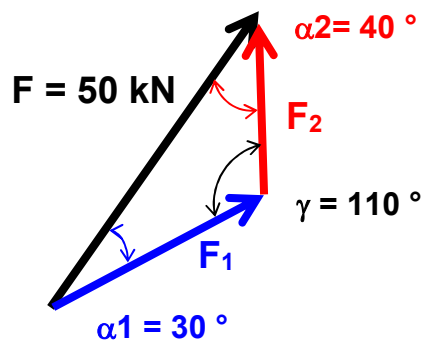
Remarque:

$F_1 + F_2 = F$; attention au sens des forces F_1 et F_2

4.3.2 Exemple 2

Force $F = 50 \text{ kN}$ $\alpha = 60^\circ$ on cherche deux forces dont les angles avec F sont 30° respectivement 40°

Dans ce cas on aura recours au théorème du sinus dans le cas d'une résolution algébrique ou plus simplement on utilisera la méthode graphique.



Par le théorème du sinus, on a la relation:

$$50 \text{ kN} / \sin 110^\circ = F_1 / \sin 40^\circ = F_2 / \sin 30^\circ$$

Solution : **$F_1 = 34.2 \text{ kN}$** **$F_2 = 26.6 \text{ kN}$**

4.3.3 Exemple 3

Descente de charge dans un pilier de cathédrale



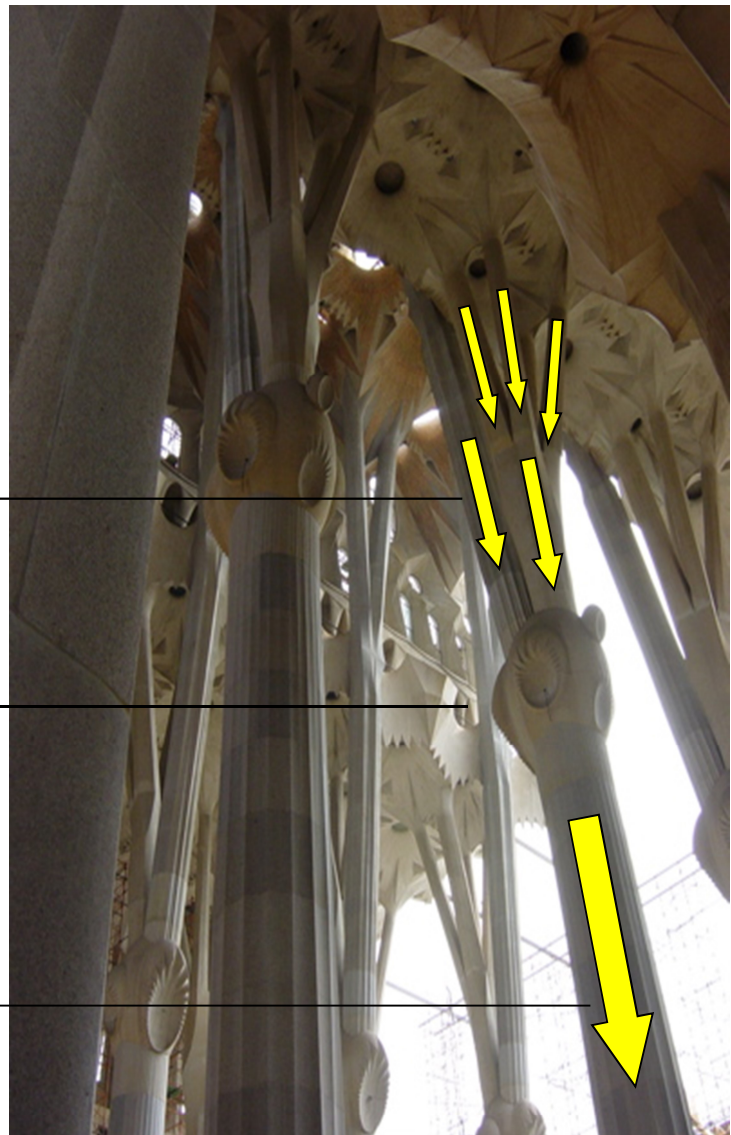
Sagrada Familia à Barcelone selon l'architecte Gaudi

Les colonnes symbolisent des troncs d'arbres. On voit le cheminement des forces vers les fondations du bâtiment.

Forces locales selon la descente de charge

Noeud

Forces locales ne formant plus qu'une seule force appelée résultante



4.4 EQUILIBRE DE FORCES CONCOURANTES COPLANAIRES

On dit qu'un **système de forces concourantes coplanaires est en équilibre**, lorsque la **résultante R** de toutes les forces **F** est nulle. Graphiquement, l'extrémité de la dernière force du dynamé coïncide avec l'origine de la première force. Mathématiquement on peut écrire :

Somme des forces selon l'axe X = 0 → notation $\Sigma F_x = 0$

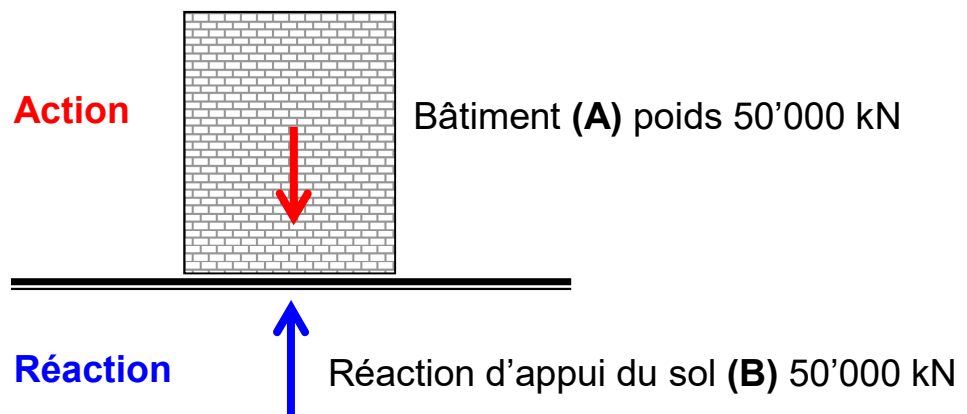
Somme des forces selon l'axe Y = 0 → notation $\Sigma F_y = 0$

Conséquences $\Rightarrow R_x$ et $R_y = 0$

Le point matériel sur lequel serait appliqué ce système de forces se trouverait alors en équilibre soit en état d'immobilité.

4.5 PRINCIPE D'ACTION - REACTION

Si un corps **A** exerce une action sur un corps **B**, réciproquement, le corps **B** exerce une force sur le corps **A**.

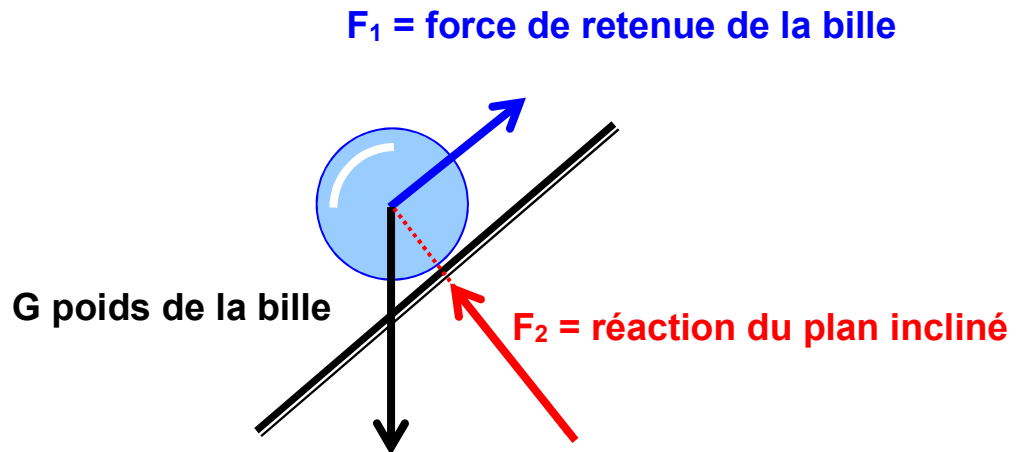


D'où l'axiome d'**Isaac Newton** ;

La réaction a même support et même grandeur que l'action mais lui est de sens contraire. **Dans la nature, il n'y a donc pas de force isolée, chaque force a son "contraire" ; elles agissent par paires.**

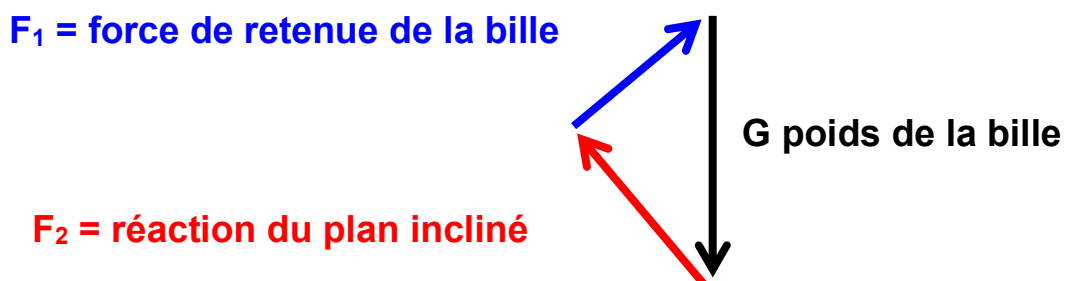
4.6 CONSTRUCTION D'UN CORPS EN EQUILIBRE

La construction d'un corps ou d'un nœud en équilibre consiste à isoler le corps dont on cherche l'équilibre et à indiquer les forces et réactions qui lui sont appliquées.



Pour trouver la valeur des réactions inconnues, il **suffit de construire le dynamisme des forces qui agissent sur le corps de telle manière que celui-ci remplisse les conditions d'équilibre ; c'est-à-dire qu'il soit fermé. Pour rappel ; un corps au repos est un corps immobile.**

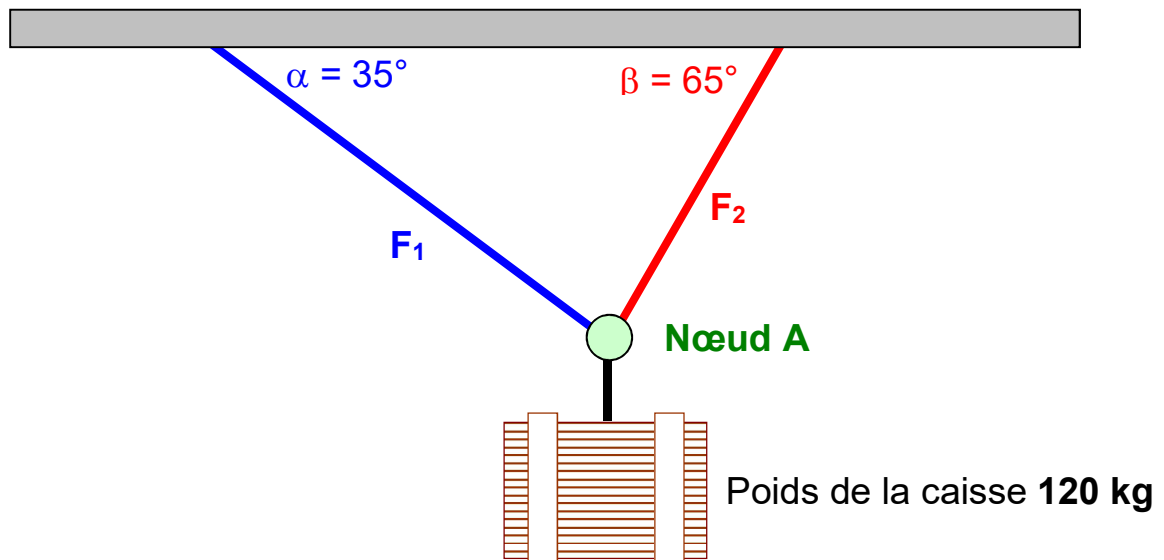
DYNAME FERME = CORPS EN EQUILIBRE = CORPS IMMOBILE



4.6.1 Exemple de résolution d'un nœud en équilibre

Déterminez la force agissant dans chaque corde supportant une caisse de 120 kg.

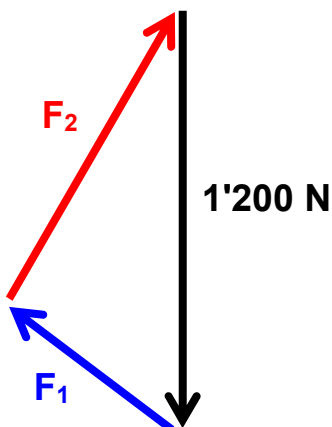
Géométrie du système



Résolution :

Le nœud **A** est immobile ; il est donc en équilibre. Par conséquent, la somme des forces (Σ Forces) qui lui sont appliquées = 0 → le dynamisme doit être fermé.

Dyname



Résolution algébrique de l'équilibre du nœud A :

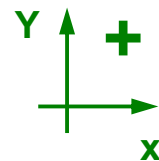
Somme des forces = 0

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = 0$$

$$F_1 \cos 145^\circ + F_2 \cos 65^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = 0$$

$$F_1 \sin 145^\circ + F_2 \sin 65^\circ - 1200 \text{ N} = 0$$



Par le théorème du sinus

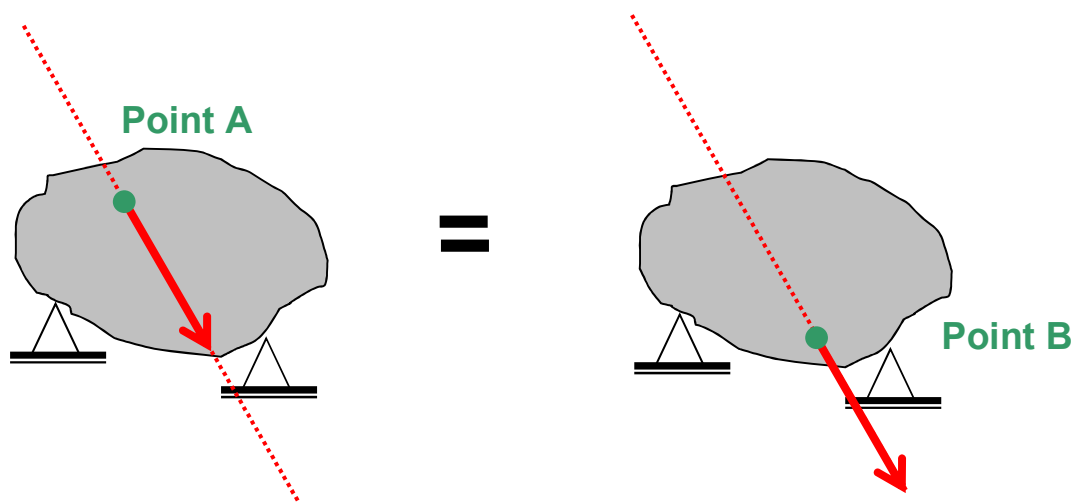
$$1200 / \sin 100^\circ = F_1 / \sin 25^\circ = F_2 / \sin 55^\circ$$

Solution : **$F_1 = 514 \text{ N}$** **$F_2 = 998 \text{ N}$**

4.7 RESULTANTE DE FORCES COPLANAIRES NON CONCOURANTES

4.7.1 Loi fondamentale du déplacement d'une force sur sa ligne d'action.

On peut toujours déplacer le point d'application d'une force suivant sa propre ligne d'action sans modifier les actions ou les effets de la force sur le corps.

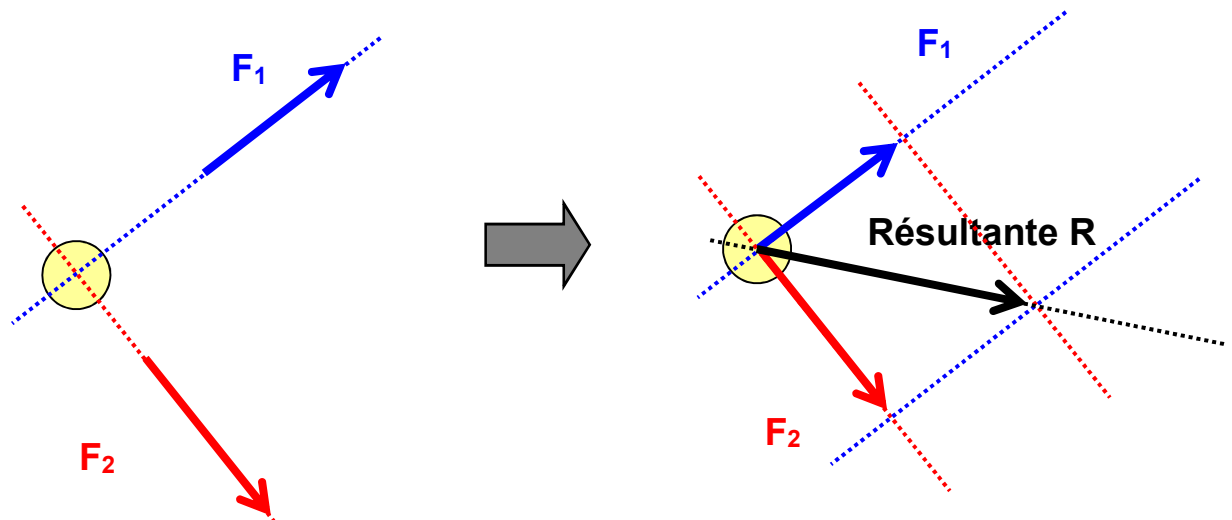


4.7.2 Résultante de 2 forces coplanaires

La résultante de deux forces coplanaires est obtenue par la méthode du parallélogramme selon la méthode graphique exposée à la page suivante. La résultante peut également être obtenue par la manière algébrique en décomposant chaque force selon ses composantes F_x et F_y . Le point par lequel passe la ligne d'action de la résultante est à rechercher par la mise en équation de l'intersection des lignes d'action des forces. La méthode algébrique est souvent plus utilisée que la méthode graphique, car les lignes d'action des forces sont en général verticales ou horizontales.

Méthode du parallélogramme

1. Rechercher l'intersection des lignes d'action des deux forces
2. Déplacer les forces vers le point d'intersection
3. Tirer des parallèles aux lignes d'action depuis l'extrémité des forces
4. La résultante est obtenue en reliant le point d'intersection des forces à l'intersection des parallèles des forces



4.7.3 Résultante de plusieurs forces coplanaires

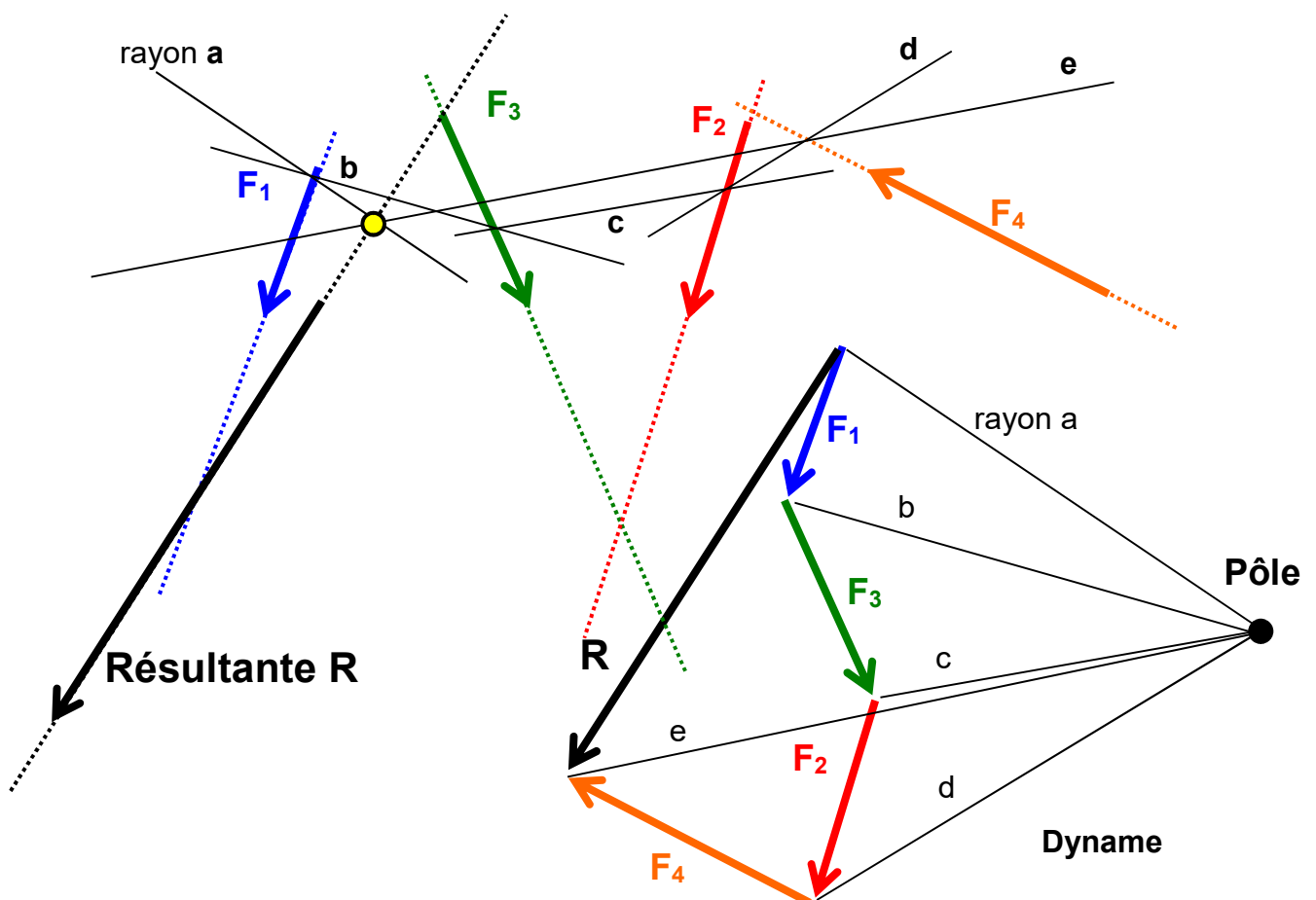
De manière analogue au paragraphe précédent, on pourrait rechercher graphiquement la résultante de plusieurs forces en combinant les résultantes des forces prises deux à deux jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une seule. Cette méthode peut fonctionner lorsqu'on est en présence de 3 ou 4 forces mais au-delà, elle devient fastidieuse. Pour surmonter ce problème, il existe une méthode graphique simple que l'on nomme **polygone funiculaire**.

4.7.4 Méthode du polygone funiculaire

La méthode est expliquée par le biais d'un exemple. Soit 4 forces quelconques coplanaires et non concourantes.

Méthodologie :

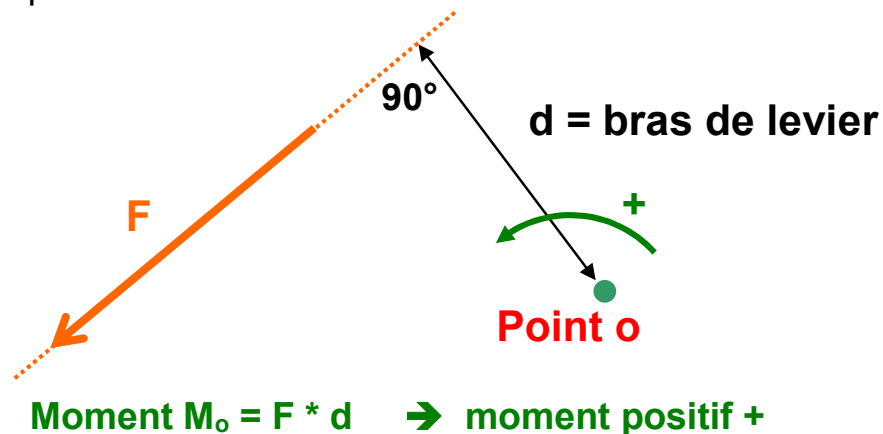
1. Créer un dynamisme à l'échelle avec toutes les forces présentes et dessiner la résultante **R**
2. Choisir un point quelconque à côté du dynamisme nommé **pôle**
3. Tirer un **rayon a,b,c,d,e** entre le pôle et chaque extrémité des forces
4. Reporter chaque rayon sur les lignes d'action des forces présentes. Le premier rayon **a** peut couper la ligne d'action de **F₁** en un point Quelconque. Le rayon **b** doit passer par l'intersection du rayon **a** avec la ligne d'action de **F₁**. Le rayon **c** doit passer par l'intersection du rayon **b** avec la ligne d'action de **F₃**. Le **d** par **c** avec **F₂** et le **e** par **d** avec **F₄**
5. La position de la ligne d'action de la résultante est obtenue par l'intersection du 1^{er} rayon (**a**) avec le dernier (**e**). Il suffit alors de reporter la résultante sur sa ligne d'action. **Remarque** : les dessins doivent être à l'échelle et le traitement des rayons doit être effectué dans l'ordre du dynamisme et correspondre à sa force.



4.8 MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

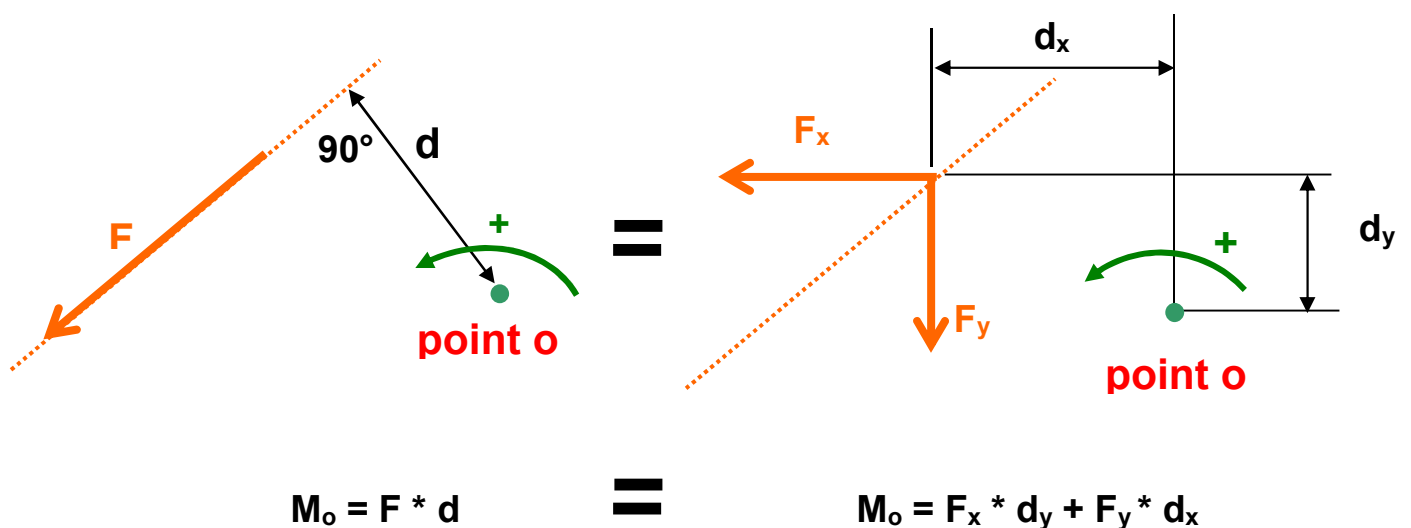
Le moment d'une force **F** par rapport à un point **o** est défini comme le produit de la force de **F** par la longueur de la perpendiculaire abaissée de **o** sur la ligne d'action de **F**. **d** est appelé bras de levier de **F**.

L'unité du moment est le N*mètre respectivement kN*mètre abrégé Nm ou kNm. Le moment possède non seulement une grandeur mais aussi un sens qui dépend de la position de **F** par rapport au point. En général, les moments qui auront un sens contraire aux aiguilles d'une montre auront un sens positif.



4.8.1 Théorème de Varignon

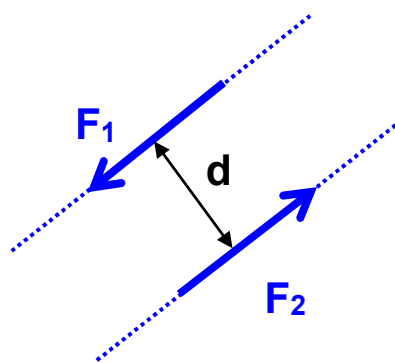
Le moment d'une force **F** par rapport à un point quelconque est égal au moment de ses composantes **F_x** et **F_y** par rapport à ce même point.



Dans le cas de plusieurs forces F , on peut dire que le moment résultant est égal à la somme des moments de chacune des forces F . Les moments s'additionnent algébriquement.

4.8.2 Moment d'un couple

On appelle couple l'ensemble de deux forces égales mais opposées et dont les lignes d'action sont parallèles. La résultante d'un couple de forces est nulle.



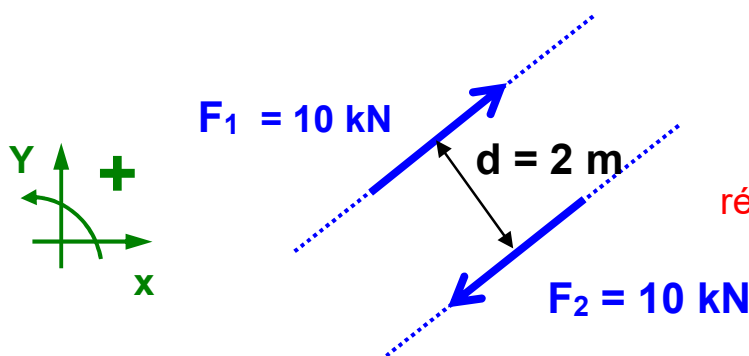
Moment d'un couple de forces

$$F_1 * d/2 + F_2 * d/2 = F_1 * d = F_2 * d$$

Le moment d'un couple de forces est égal à $F_1 * d/2 + F_2 * d/2 = F_1 * d = F_2 * d$. Le couple de force peut être déplacé dans le plan sans modifier l'équilibre d'un corps car le moment est constant et la résultante est nulle.

De manière inverse, on peut décomposer un moment en un couple de forces. Il suffit pour cela d'admettre **à priori** une valeur pour le bras de levier d ou les forces F , les autres valeurs étant données par la relation **Force * d = Moment**. L'orientation des lignes d'action des forces formant le couple peut être quelconque puisque la résultante est nulle.

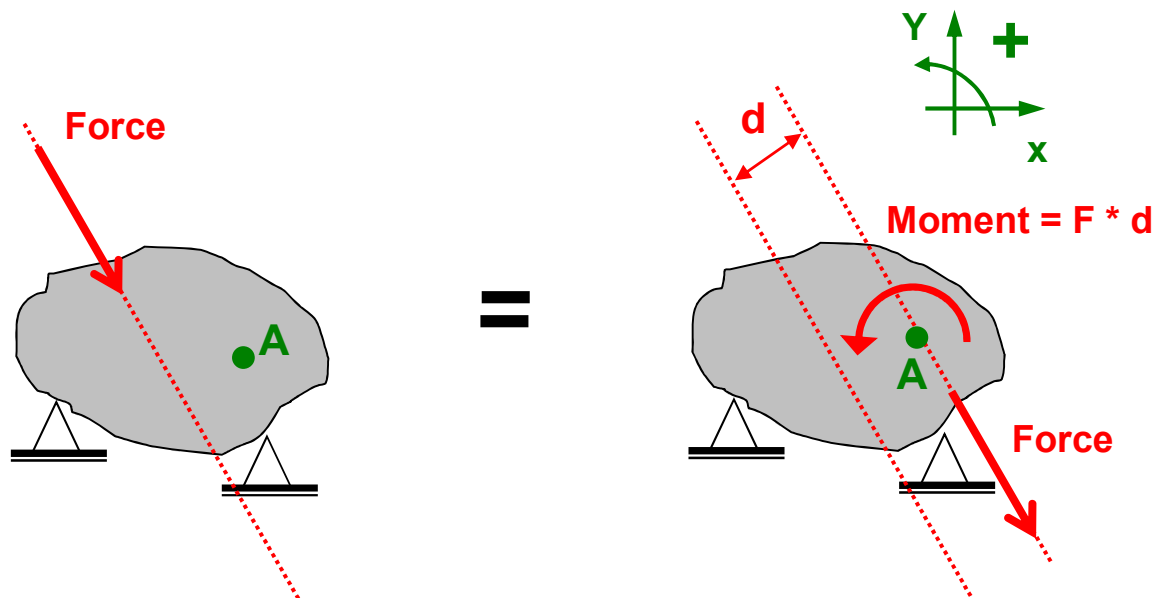
$$\text{Moment} = -20 \text{ kNm} ; d = 2 \text{ m (admis)} \Rightarrow F_1 = F_2 = 20 / 2 = 10 \text{ kN}$$



Système équivalent à un moment de - 20 kNm. La résultante du système = 0 kN

4.8.3 Réduction d'une force à une force passant par un point donnée et un couple

Toute force $\mathbf{F}$ appliquée à un point quelconque d'un corps rigide peut être déplacée vers un point $\mathbf{A}$ pour autant qu'on lui associe un moment dont la valeur est égale à $\pm \mathbf{F} * \mathbf{d}$ selon le sens de rotation.



Nous appellerons cet ensemble de **force + moment** un système **couple-force**. En appliquant ce principe, l'équilibre ou l'effet sur le corps est équivalent. **Pour rappel, lorsqu'on déplace un moment dans l'espace, il n'y a aucune compensation à faire car la résultante d'un moment est nulle.**

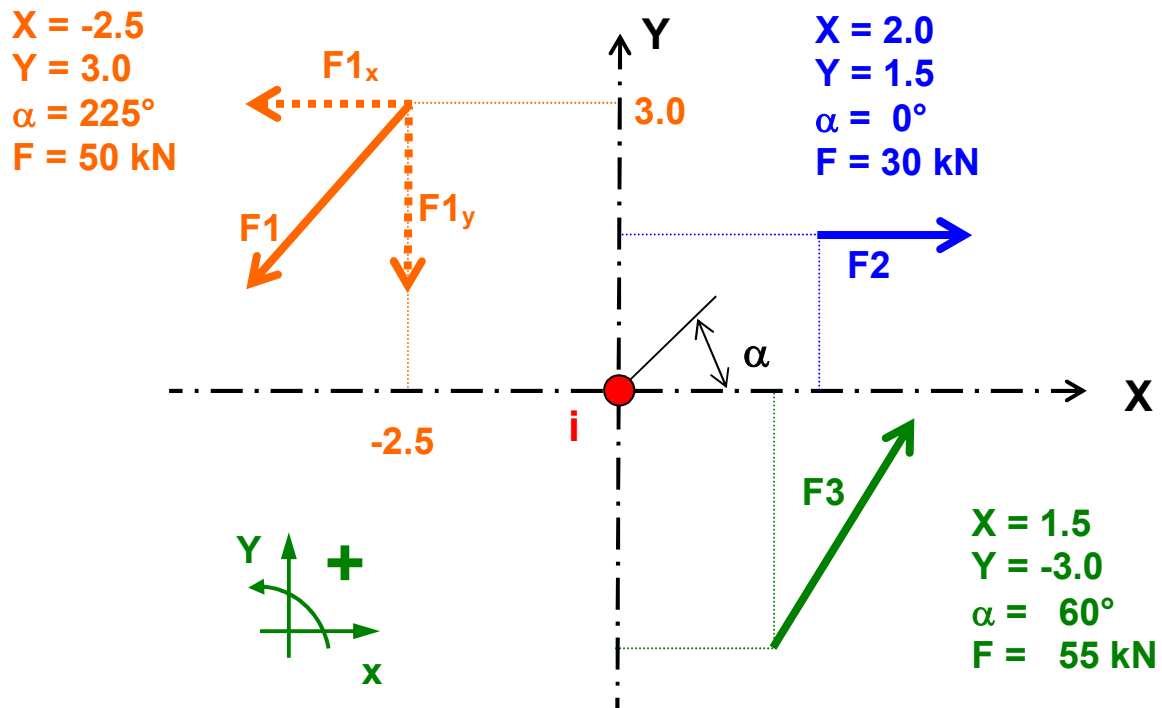
4.8.4 Réduction d'un système de forces coplanaires en un système force-couple

Soit un système de forces coplanaires F_1 , F_2 et F_3 appliqué à un corps rigide. En réduisant chaque force en un point $\mathbf{A}$ quelconque et en y ajoutant chaque moment équivalent, nous obtenons un système de forces concourantes et des moments. **Ces forces peuvent être remplacées par leur résultante et les moments peuvent être additionnés** en tenant compte de leur sens de rotation. Ainsi, tout système de forces coplanaires peut être réduit en un système couple-force équivalent appliqué au point $\mathbf{A}$.

En pratique, on travaillera dans un système de coordonnées X-Y au moyen d'un tableau. Les forces seront décomposées en composantes F_x et F_y de même que leur bras de levier respectif. La résultante et le moment résultants seront obtenus par sommation.

Exemple de réduction

Réduction du système de forces au point **i** de coordonnées **0 / 0**.



N°	$F_i \text{ kN}$	α_i°	$X_i \text{ m}$	$Y_i \text{ m}$	$F_{ix} \text{ kN}$	$F_{iy} \text{ kN}$	$M_A \text{ kNm}$
1	50	225	-2.5	3.0	-35.4	-35.4	+106.2 + 88.5 = +194.7
2	30	0	2.0	1.5	30.0	0.0	-45.0 + 0.0 = -45.0
3	55	60	1.5	-3.0	27.5	47.6	+82.5 + 71.4 = +153.9
Somme					22.1	12.2	+303.6

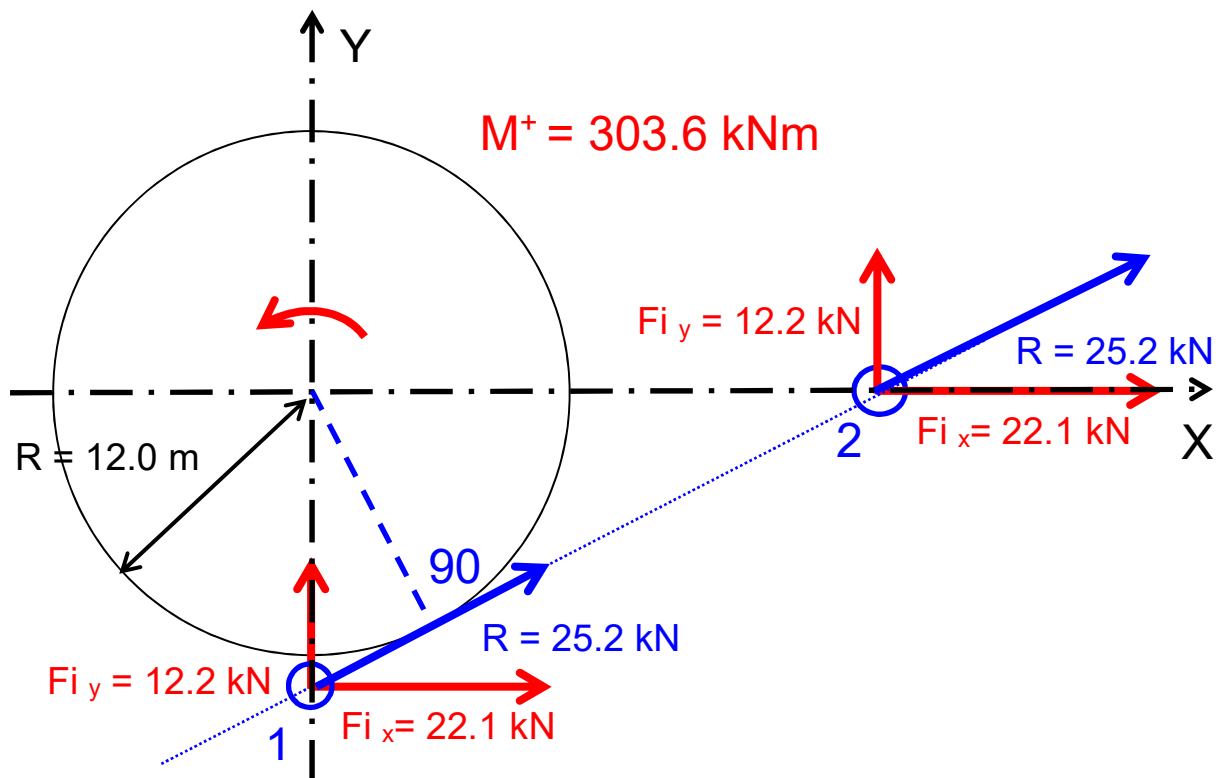
$$\text{Résultante } R = \sqrt{22.1^2 + 12.2^2} = 25.2 \text{ kN}$$

$$\text{Angle de la résultante } \alpha_R = \text{tg}^{-1}(12.2 / 22.1) = 28.9^\circ$$

$$d = M_i / R = 12.0 \text{ m} \quad dx = M_i / R_y = +24.9 \text{ m} \quad dy = M_i / R_x = -13.7 \text{ m}$$

**La ligne d'action de la résultante passera par les points
X ; Y de coordonnées (0.0 ; -13.7) et (24.9 ; 0.0)**

Démonstration « graphique » de la recherche des coordonnées de la ligne d'action d'action de la résultante d'un groupe de forces.



On applique le théorème de Varignon

$$\pm M_{\text{total}} = \pm R \cdot d = \pm R_x \cdot d_y \pm R_y \cdot d_x$$

(Tenir compte du sens du moment dans tous les calculs !)

A- On fait glisser la résultante et ses composantes sur sa ligne d'action jusqu'à atteindre l'axe Y « en position 1 »

Position 1 >> recherche de la coordonnée d_y car $d_x = 0$

$$M_{\text{total}} = 303.6 \text{ kNm} = 22.1 \cdot d_y + 12.2 \cdot d_x (=0)$$

$$d_y = 13.7 \text{ m (tenir compte du sens du moment !)}$$

Coordonnée n°1 de la ligne d'action >> (0 ; -13.7)

B- On fait glisser la résultante et ses composantes sur sa ligne d'action jusqu'à atteindre l'axe X « en position 2 »

Position 2 >> recherche de la coordonnée d_x car $d_y = 0$

$$M_{\text{total}} = 303.6 \text{ kNm} = 22.1 \cdot d_x + 12.2 \cdot d_y (=0)$$

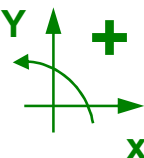
$$d_x = 24.9 \text{ m (tenir compte du sens du moment !)}$$

Coordonnée n° 2 de la ligne d'action >> (24.9 ; 0)

5. EQUILIBRE DES CORPS RIGIDES

5.1 CORPS RIGIDES EN EQUILIBRE

Un corps rigide est en équilibre lorsque les forces externes qui agissent sur lui forment un système de **forces équivalentes à zéro**. C'est-à-dire un système où **la résultante et le couple sont nuls**. Analytiquement les conditions d'équilibre s'expriment par la formulation suivante :

$\Sigma \text{ Forces }_x$	$= 0$	
$\Sigma \text{ Forces }_y$	$= 0$	
$\Sigma \text{ Moments }_i$	$= 0$	

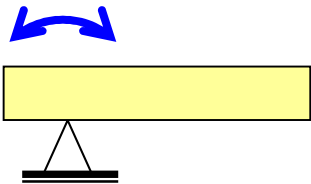
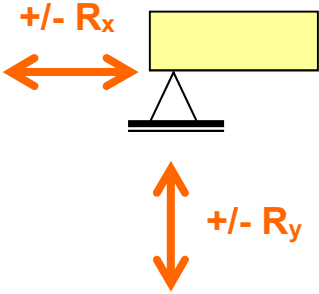
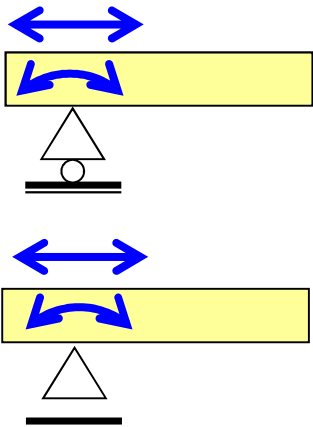
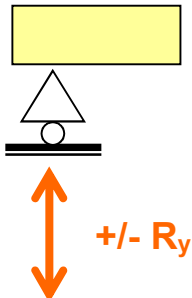
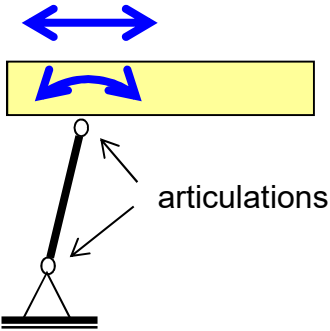
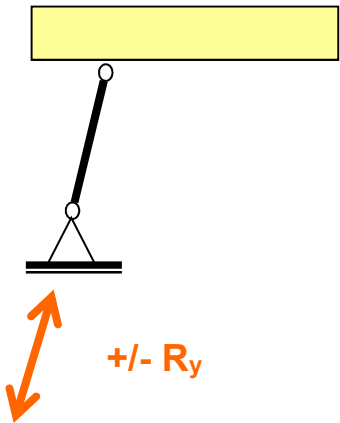
Les axes X-Y et le point i peuvent être choisis arbitrairement. Les équations indiquent que les forces extérieures n'impriment aucun mouvement, aucune rotation et aucune translation. Les forces extérieures sont donc en équilibres.

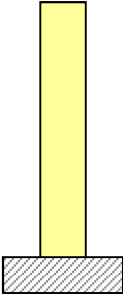
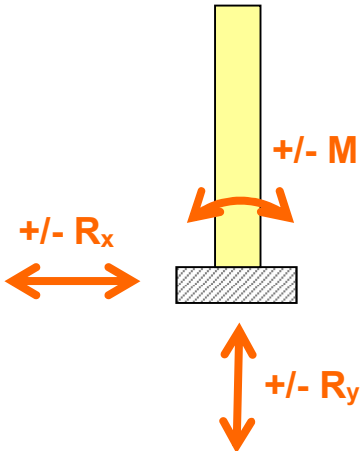
5.2 SCHEMA DU CORPS EN EQUILIBRE

Le corps isolé

Pour étudier l'équilibre d'un corps, il faut tenir compte de toutes les forces agissant sur lui. Par conséquent, il faut dessiner le schéma du corps isolé en coupant les liaisons avec les autres corps. **Les forces extérieures inconnues sont les réactions d'appuis** qui s'exercent au point où le corps isolé est en contact ou supporté par les autres corps.

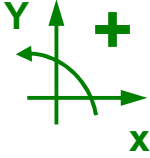
Il existe **4** types d'appuis ou liaison:

Type d'appuis	Représentation et degrés de libertés	Forces transmises
Articulé Appuis ou liaisons qui ne permettent qu'une rotation. Les déplacements verticaux et horizontaux sont bloqués. Exemple : pied d'un poteau métallique fixé avec des chevilles Hilti.	rotation possible 	
Mobile ou glissant Appuis ou liaison qui ne permettent qu'une rotation et une translation dans une direction. La réaction d'appui sera une force normale à la surface de glissement. Exemple : sommet d'une pile de pont (pont flottant).	déplacement et rotation possibles 	
Pendulaire Appuis qui permettent une rotation selon les articulations. La réaction aura nécessairement la direction de la droite joignant les deux articulations Exemple : poteau en bois supportant un plancher.	déplacement et rotation possibles 	

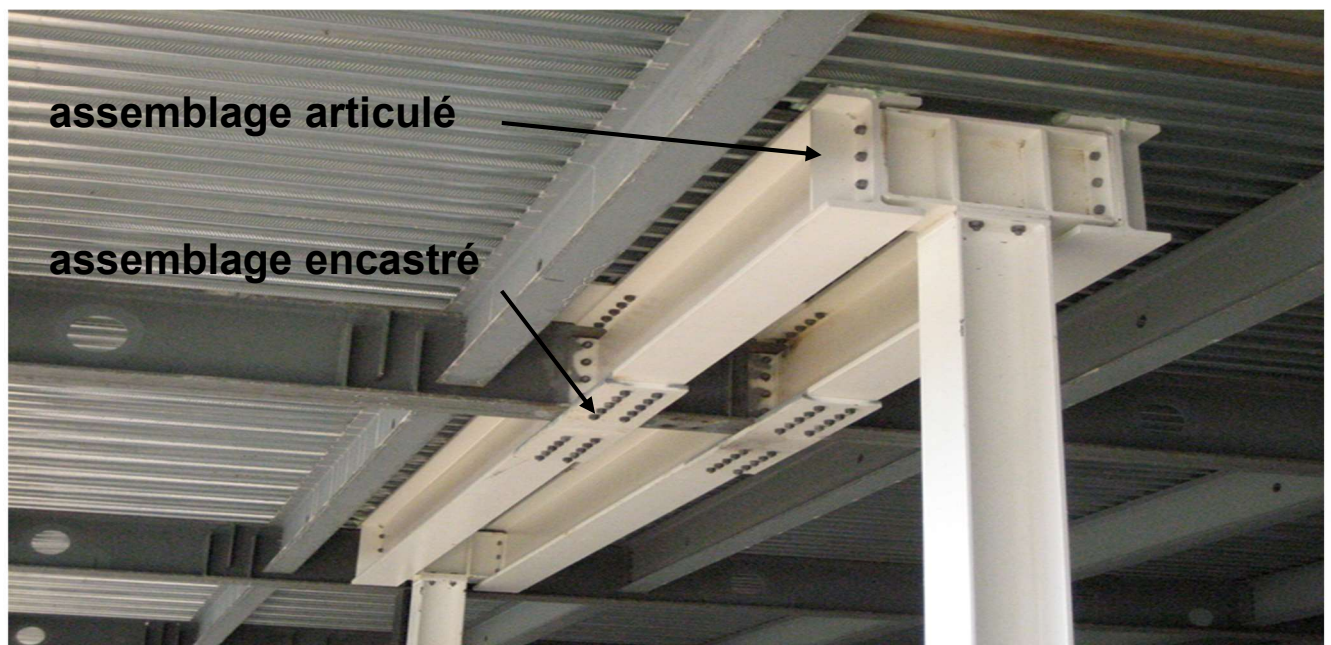
Type d'appuis	Représentation et degrés de libertés	Forces transmises
Encastré Appuis ou liaison qui ne permet ni rotation ni déplacement horizontal ni déplacement vertical. Exemple : mât de projecteur d'éclairage encastré dans la fondation. Dalle d'un balcon encastrée dans un mur.	Aucun mouvement possible 	

5.3 ETUDE DE L'EQUILIBRE D'UN CORPS RIGIDE

Comme nous l'avons vu, les conditions d'équilibres sont

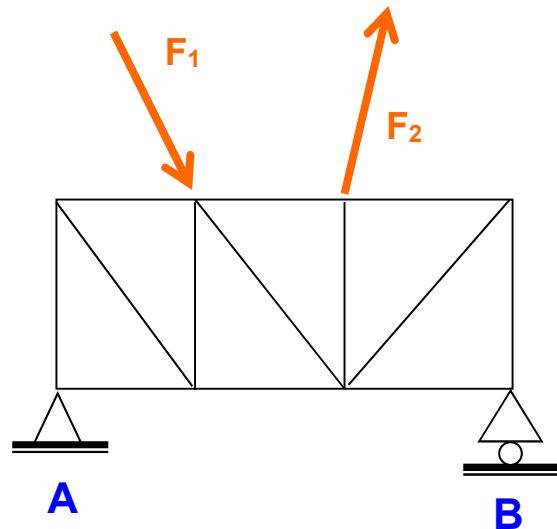
$\Sigma \text{ Forces } x = 0$ $\Sigma \text{ Forces } y = 0$ $\Sigma \text{ Moments } i = 0$	
---	--

Où **A** peut être n'importe quel point de la structure. **Les 3 équations ci-dessus permettent de déterminer 3 inconnues.** Lorsque les réactions à déterminer sont au nombre de 3, on dit que le système est statiquement déterminé ou **isostatique**. C'est ce type même de structure que nous étudions dans ce cours. Si le nombre d'inconnues est plus grand que 3, le système est statiquement indéterminé ou **hyperstatique**. Ce cas de figure ne sera pas traité dans ce cours car la résolution de tels systèmes est complexe. Si le nombre d'inconnue est plus petit que 3, le système est inconsistant ou instable (**=> la structure s'écroule !**) ; il est dit **hypostatique**.

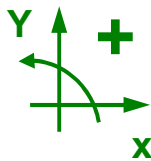


Etude de l'équilibre d'un corps

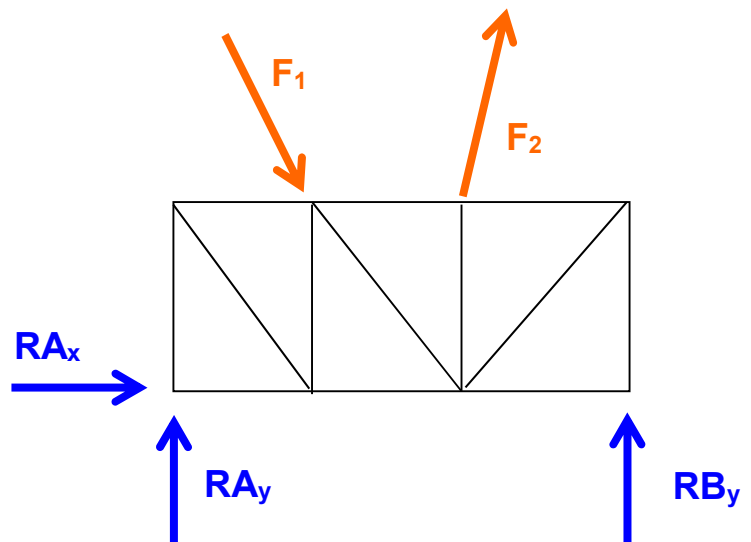
Situation : Ferme à treillis appuis selon choix de l'ingénieur



Corps isolé :



Convention de signe pour la résolution du système d'équation



Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0 \\ \Sigma \text{ Moments } i &= 0\end{aligned}$$

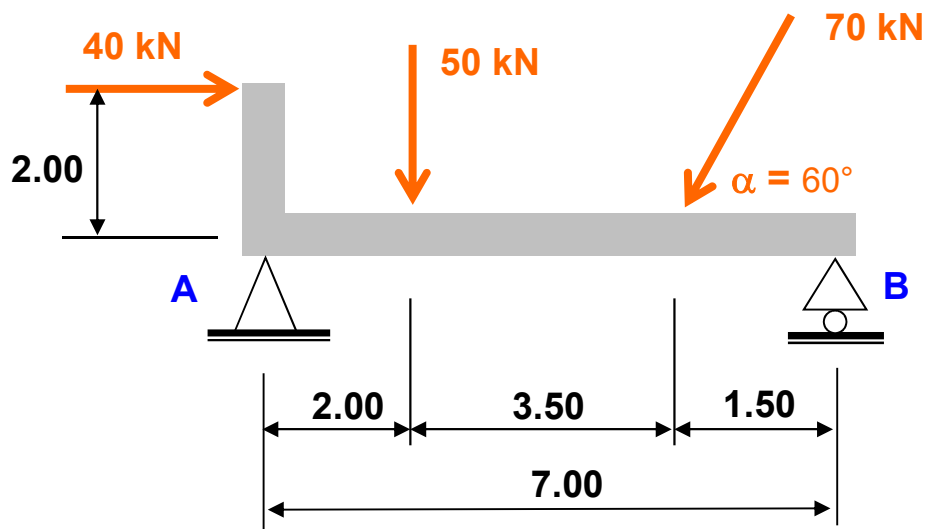
=> 3 inconnues ; RA_x RA_y RB_y => système isostatique

=> Le système est stable

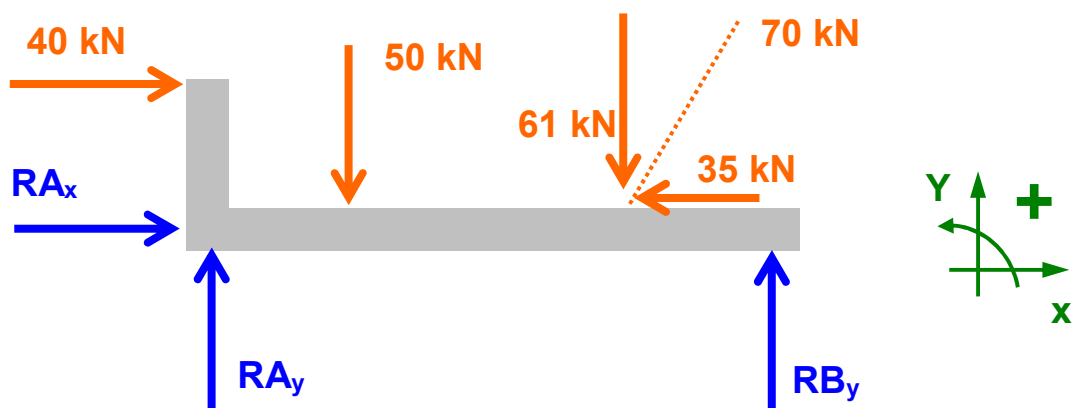
=> Nous sommes capables de résoudre le système

5.3.1 Exemple 1

Calcul des réactions d'appuis de la poutre ci-dessous.



Corps isolé



Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0 \\ \Sigma \text{ Moments } i &= 0\end{aligned}$$

=> 3 inconnues ; RA_x RA_y RB_y => système isostatique

=> Le système est stable

Résolution du système d'équation

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces }_x &= 0 \Rightarrow 40 + (-35) + R_{Ax} = 0 \\ R_{Ax} &= -5 \text{ kN}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces }_y &= 0 \Rightarrow (-50) + (-61) + R_{Ay} + R_{By} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} &= 111 \text{ kN}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Moments }_A &= 0 \Rightarrow (-2.0 \cdot 40) + (-2.0 \cdot 50) + (-5.5 \cdot 61) \\ &\quad + (7.0 \cdot R_{By}) = 0 \\ R_{By} &= 515.5 / 7 = 73.6 \text{ kN}\end{aligned}\quad (3)$$

En injectant (3) dans (2) il vient
 $R_{Ay} = 111 - 73.6 = 37.4 \text{ kN}$

Vérification: Σ des moments par rapport à un point quelconque = 0

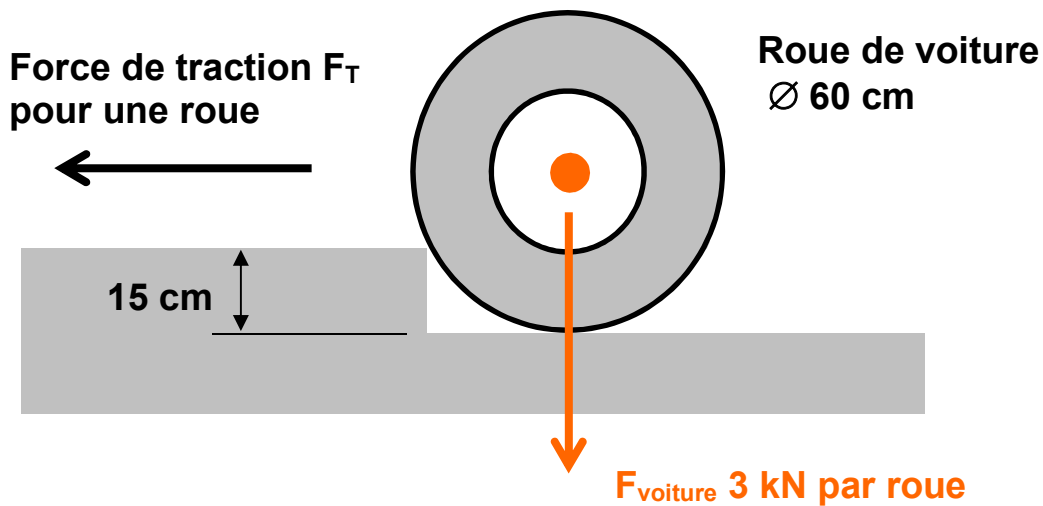
$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Moments }_B &= 0 \Rightarrow (-2.0 \cdot 40) + (5.0 \cdot 50) + (1.5 \cdot 61) + (-7.0 \cdot 37.4) = 0 \\ &\Rightarrow \text{Moment} = 0 \\ &\Rightarrow \text{Résultats OK}\end{aligned}$$

Remarque

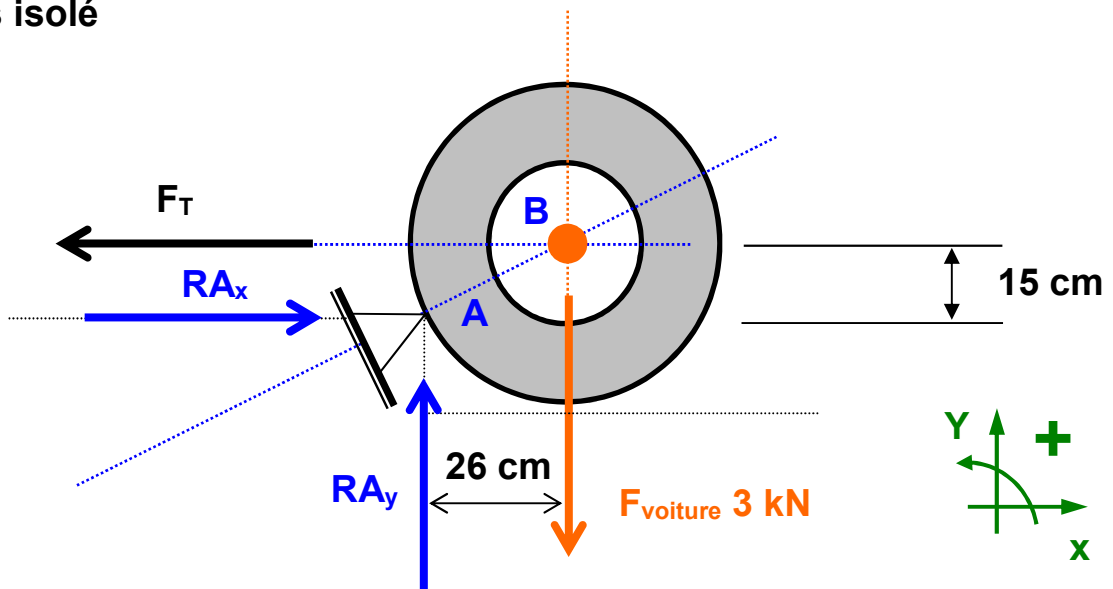
Une petite réflexion doit être effectuée afin de choisir judicieusement son système d'axes X-Y (position, orientation...) ainsi que les points pour effectuer la somme des moments. **Certains points bien particuliers ; appuis, articulations... permettent de simplifier grandement les équations mathématiques.**

5.3.2 Exemple 2

Calculer les forces agissant sur la roue d'une voiture qui franchit le rebord d'un trottoir. Quelle doit être la **"force de traction"** de la voiture pour franchir le trottoir. **Le pneu ne peut pas glisser sur l'arête du trottoir.**



Corps isolé



Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0 \\ \Sigma \text{ Moments } A &= 0\end{aligned}$$

=> 3 inconnues ; RA_x RA_y F_T => système isostatique

=> **Le système est stable**

Résolution du système d'équation

Remarques: nous étudions les forces à l'instant où la roue vient juste de décoller de la surface de la route pour monter sur le trottoir. La force de traction peut être assimilée à une troisième réaction d'appui.

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \Rightarrow R_{Ax} + (-F_T) = 0 \\ R_{Ax} &= F_T\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } y &= 0 \Rightarrow (-3) + R_{Ay} = 0 \\ R_{Ay} &= 3 \text{ kN}\end{aligned}\quad (2)$$

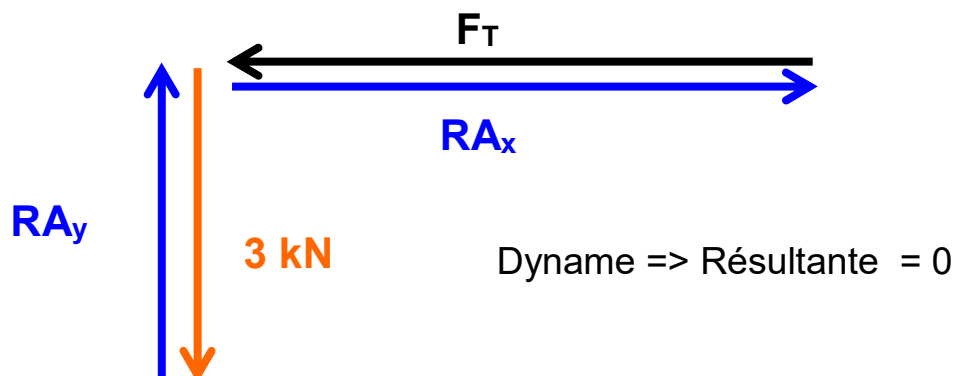
$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Moments } A &= 0 \Rightarrow (-0.26 \cdot 3) + (+0.15 \cdot F_T) = 0 \\ F_T &= 0.78 / 0.15 = 5.2 \text{ kN}\end{aligned}\quad (3)$$

En injectant (3) dans (1) il vient
 $R_{Ax} = F_T = 5.2 \text{ kN}$

Vérification : Σ des moments par rapport à un point quelconque = 0

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Moments } B &= 0 \Rightarrow (-0.26 \cdot 3) + (0.15 \cdot 5.2) = 0 \\ &\Rightarrow \text{Moment} = 0 \\ &\Rightarrow \text{Résultats OK}\end{aligned}$$

Résolution graphique : $\Rightarrow$ toutes les forces sont concourantes au point B
 $\Rightarrow$ la résultante des forces doit être nulle



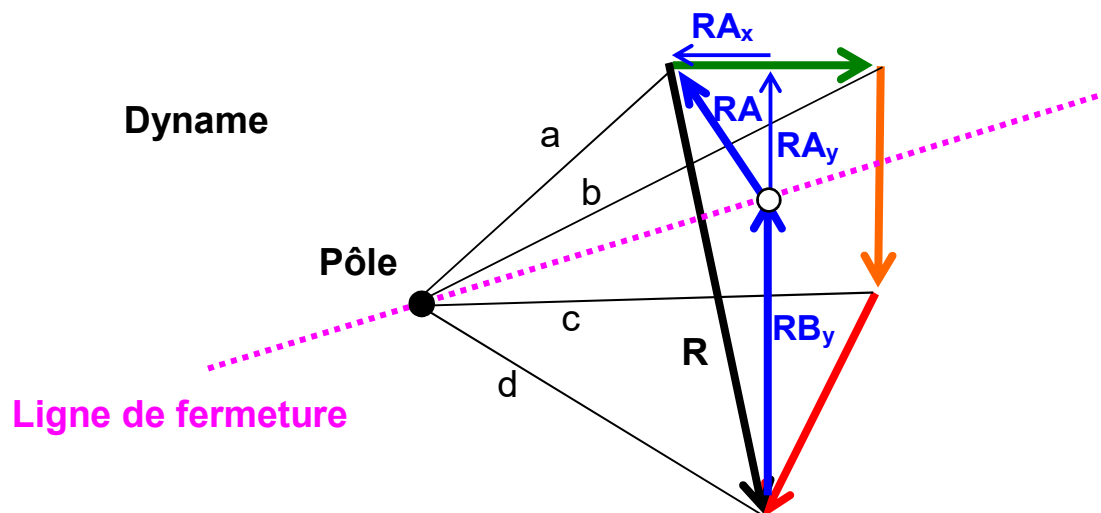
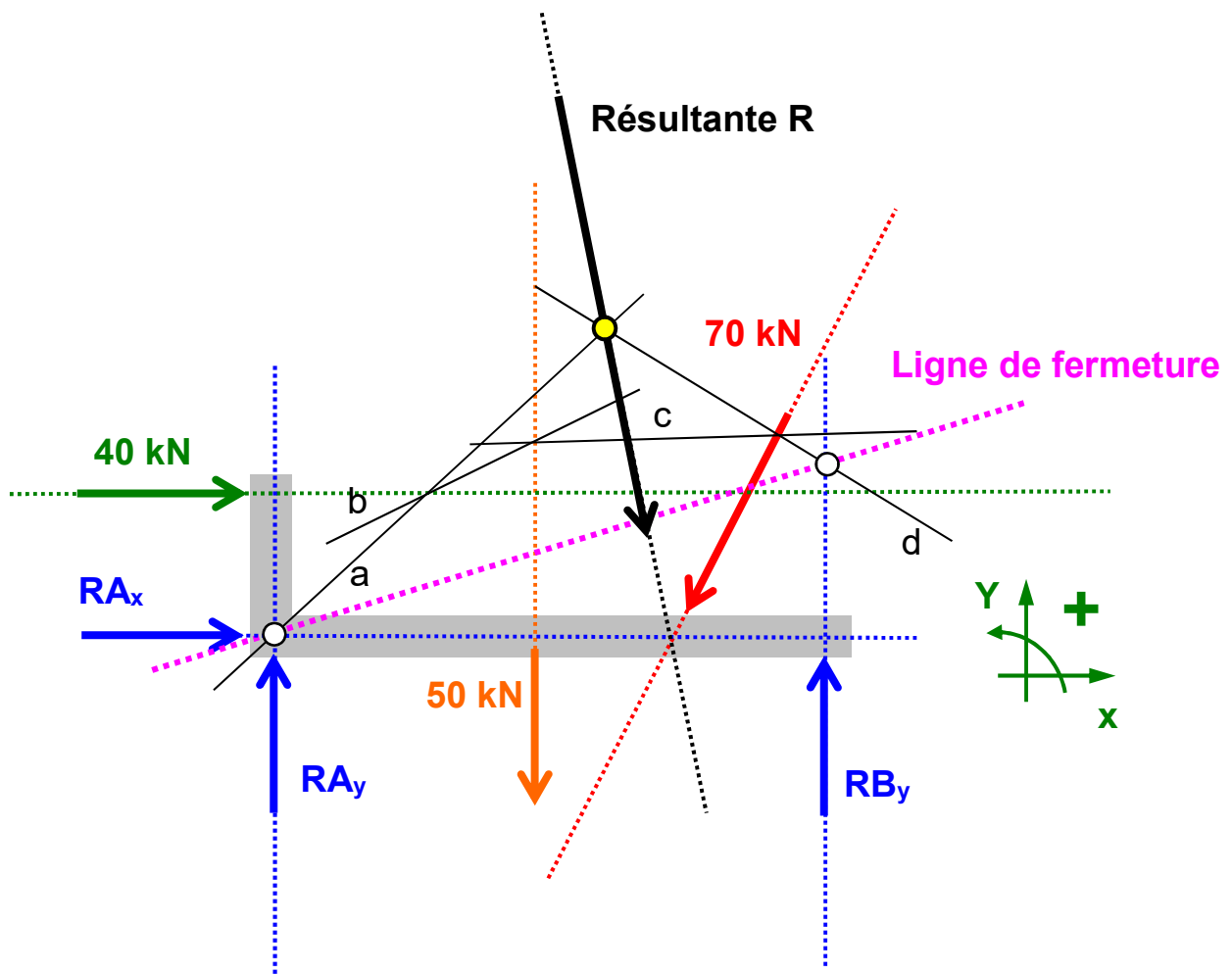
5.4 RESOLUTION GRAPHIQUE DE L'EQUILIBRE D'UN CORPS RIGIDE ISOLE

La méthode est expliquée par le biais d'un exemple. Pour résoudre le problème on aura recours à la méthode du **polygone funiculaire**.

Méthodologie : (voir exemple à la page suivante)

1. Isoler le corps ou la structure en question et dessiner les lignes d'actions de toutes les forces y compris celles des réactions selon les conditions d'appui.
2. Créer un dynamisme à une échelle convenable, choisir un pôle et tracer les rayons entre le pôle et les forces (voir chap. 4.6.4).
3. Reporter les rayons du dynamisme sur le corps ou la structure. L'appui **A** possèdera une composante RA_x et RA_y qui peut être remplacée par une résultante R . De cette résultante, nous ne connaissons que l'un de ses points de passage obligé ; le point **A**. Dès lors, **il est impératif de faire passer le 1^{er} rayon par l'appui fixe A car la ligne d'action de la résultante des composantes RA_x et RA_y y passe forcément**. Pour l'appui glissant **B**, il n'y a pas de contrainte car il n'y a qu'une seule réaction dont la ligne d'action est connue. Pour plus de précision sur le report des rayons voir chap. 4.6.4. La résultante des forces passe par l'intersection des rayons **a** et **d**
4. Tracer une ligne dite **ligne de fermeture** entre les points formés par le point de départ obligé des rayons ; le point A et par l'intersection du dernier rayon avec la ligne d'action de l'appui glissant B.
5. Reporter la ligne de fermeture dans le dynamisme. La ligne de fermeture doit passer par le pôle.
6. La ligne de fermeture détermine RA et RB . Comme RB a une ligne d'action verticale, pour obtenir sa valeur il suffit de tirer une verticale depuis l'extrémité des forces jusqu'à la ligne de fermeture. RA doit fermer le dynamisme pour que le corps soit en équilibre, il suffit de joindre l'intersection de la ligne d'action de RB avec la ligne de fermeture avec le point de départ des forces. Les composantes RA_x et RA_y sont obtenues par projection de RA .

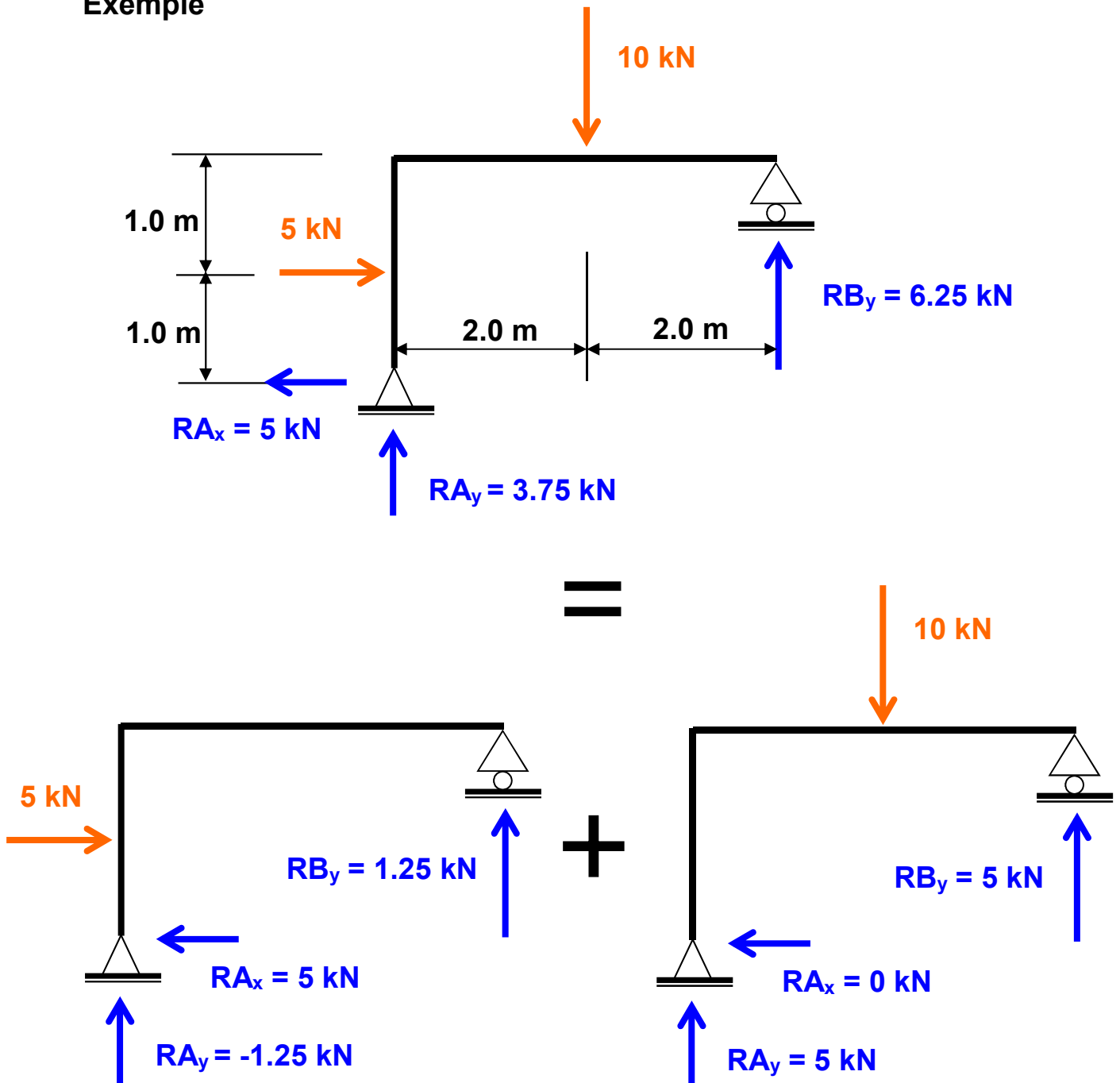
Remarque : les dessins doivent être à l'échelle et le traitement des rayons doit être effectué dans l'ordre du dynamisme et correspondre à sa force.



5.8 PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES EFFORTS

Lorsqu'un corps est soumis à plusieurs forces, on peut calculer les effets (réactions) de ces forces les uns indépendamment des autres. L'équilibre global sera obtenu par superposition des efforts.

Exemple



6. LES EFFORTS INTERIEURS

6.1 DEFINITIONS

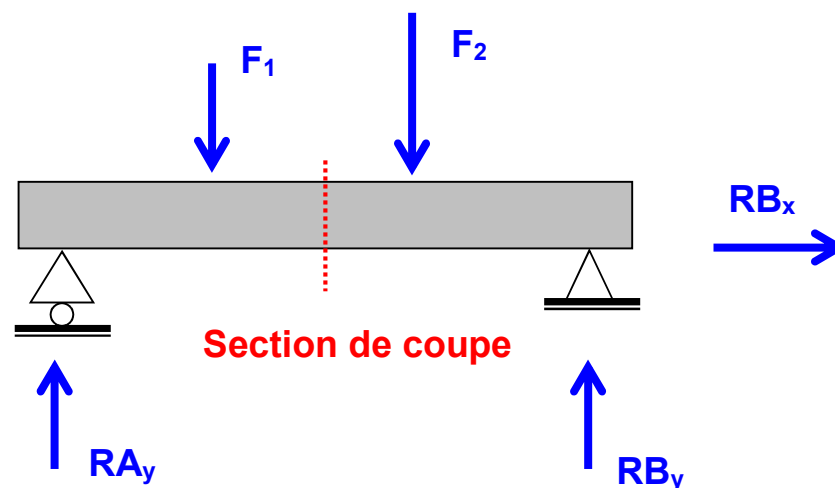
En connaissant les efforts qui agissent à l'intérieur de la matière d'une structure, l'ingénieur pourra vérifier si la dimension de l'élément choisi suffira pour résister aux sollicitations.

Si par la pensée, nous coupons une barre en un point quelconque, nous devons pour maintenir l'équilibre des deux parties, leur appliquer un jeu d'efforts que l'on nomme **efforts intérieurs**. Les efforts intérieurs que l'ingénieur utilise constamment dans ses dimensionnements sont au nombre de 3 ; il s'agit de :

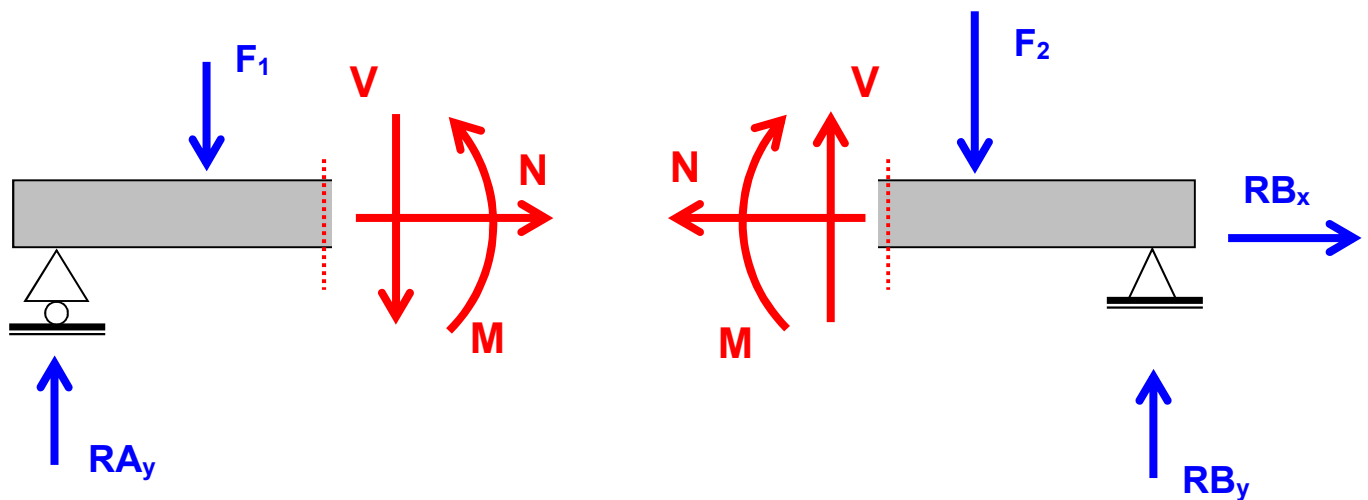
A - L'effort normal. Il s'appelle ainsi car cet effort agit perpendiculairement à la section de coupe. Il résulte d'un effort de traction ou de compression sur une barre. Dans les schémas que nous utiliserons, cet effort sera **abrégié par la lettre N**.

B - L'effort tranchant. Il s'appelle ainsi car cet effort agit dans le plan de la section de coupe. Son effet tend à vouloir trancher la barre. Dans les schémas que nous utiliserons, cet effort sera **abrégié par la lettre V**.

C - Le moment intérieur. Son effet tend à faire fléchir la barre. Dans les schémas que nous utiliserons, cet effort sera **abrégié par la lettre M**.



Efforts intérieurs à gauche et à droite de la section de coupe. Ces efforts agissent dans la matière de la poutre.



Avec l'ajout des efforts intérieurs de part et d'autre de la section de coupe, on constate que la barre est toujours en équilibre. Par déduction, les efforts intérieurs doivent bien être présents à l'intérieur de la poutre. D'autre part, pour assurer l'équilibre de la partie gauche ou de la partie droite de la poutre, **les efforts intérieurs doivent être équivalents aux effets des forces situées soit à gauche soit à droite de la section de coupe. Les efforts intérieurs à gauche et à droite sont donc égaux en valeurs mais de sens opposé.**

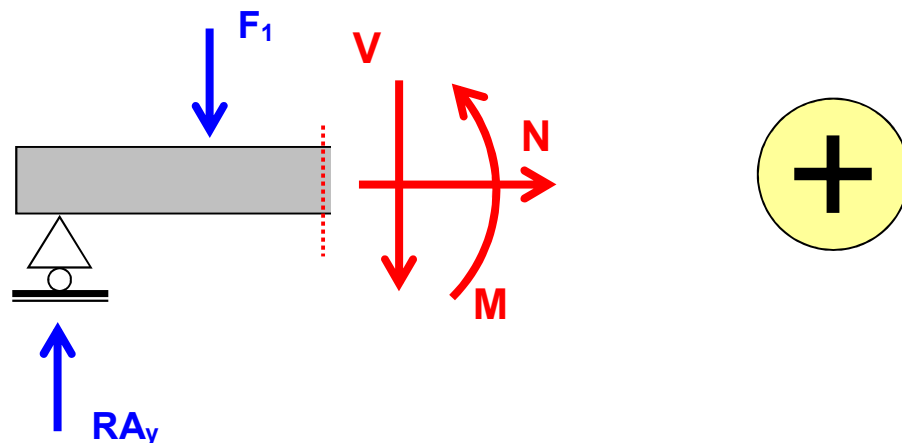
6.2 CALCUL DES EFFORTS INTERIEURS

Les efforts intérieurs **N-V-M** sont représentés sous la forme de schémas. Ils permettent en un coup d'œil de voir les valeurs maximales des efforts qui agissent à l'intérieur de la matière ainsi que leur position. Pour dessiner les efforts intérieurs, il suffit de choisir judicieusement des sections de coupe et de déterminer les efforts intérieurs qui contribuent à l'équilibre de la partie à gauche ou à droite de la section de coupe. Pour garantir l'équilibre des parties à gauche ou à droite, nous devons appliquer à chaque section de coupe les conditions d'équilibre suivantes :

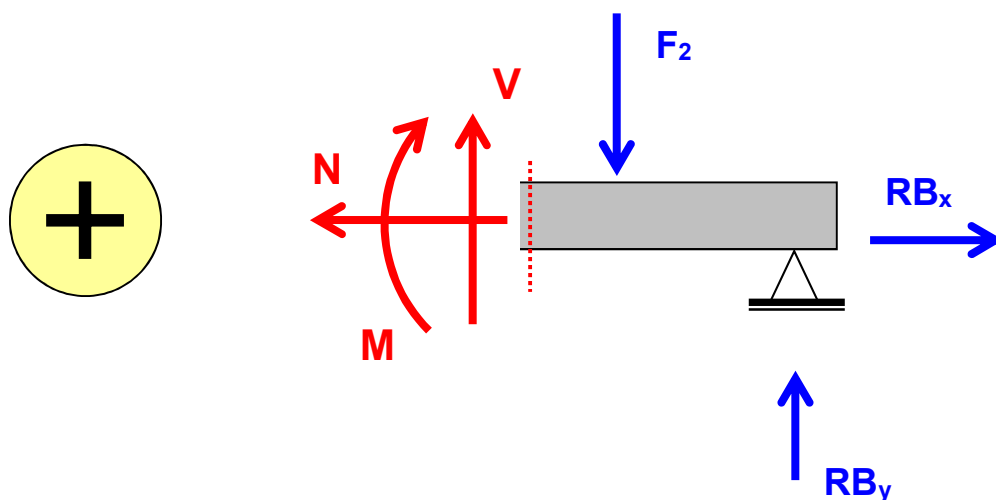
$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } N &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } v &= 0 \\ \Sigma \text{ Moments }_{\text{coupe}} &= 0\end{aligned}$$

Il existe une convention de signe internationale qui définit pour une partie à gauche ou à droite de la section de coupe, le sens des efforts intérieurs qui seront dits "**positifs**". Cette convention de signe est aussi valable pour tous les logiciels de calcul informatique.

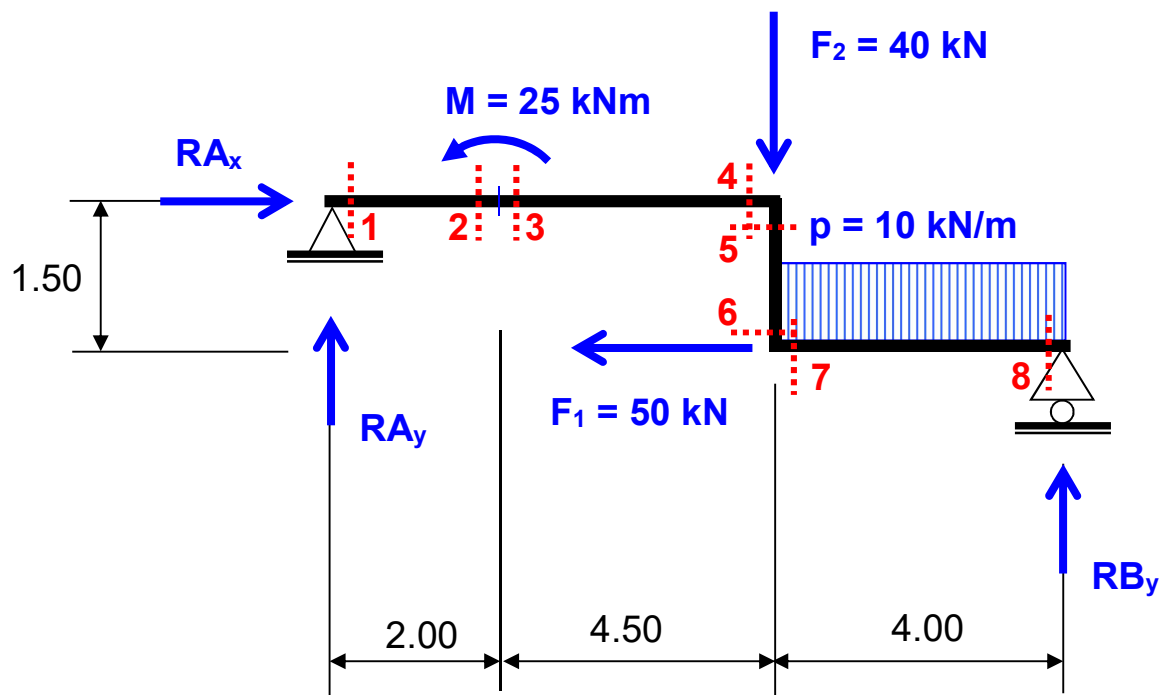
Partie à gauche de la section de coupe
=> sens positif des efforts intérieurs



Partie à droite de la section de coupe
=> sens positif des efforts intérieurs



6.3 EXEMPLE DE CALCUL DES EFFORTS INTERIEURS



6.3.1 Calcul des réactions d'appuis

Le système est-il isostatique ?

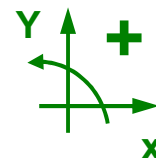
=> OK

$$\Sigma \text{ Forces } x = 0$$

$$\Sigma \text{ Forces } y = 0$$

$$\Sigma \text{ Moments } A/B = 0$$

convention de signe



Solution:

$$R_{Ax} = 50.00 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = 18.10 \text{ kN}$$

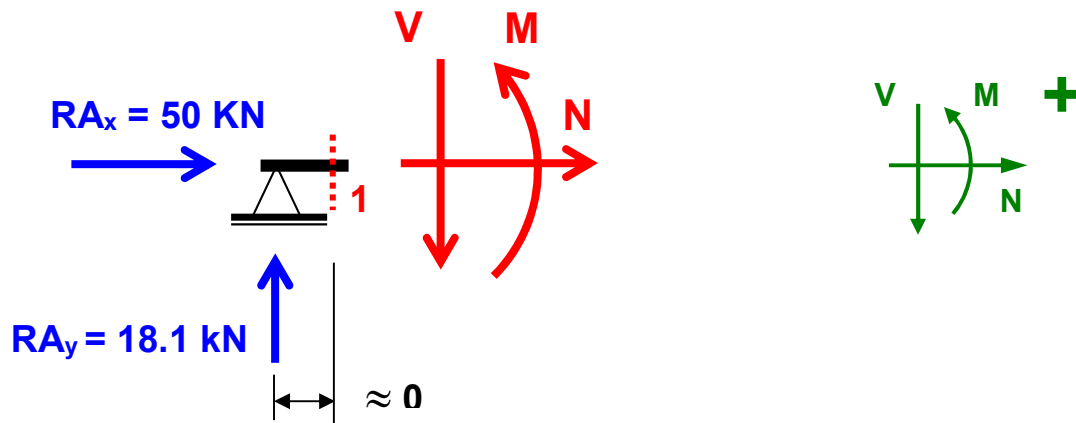
$$R_{By} = 61.90 \text{ kN}$$

6.3.2 Choix des coupes

Numérotation des coupes de 1 à 8 selon le schéma ci-dessus

6.3.3 Résolution de l'équilibre dans chaque coupe

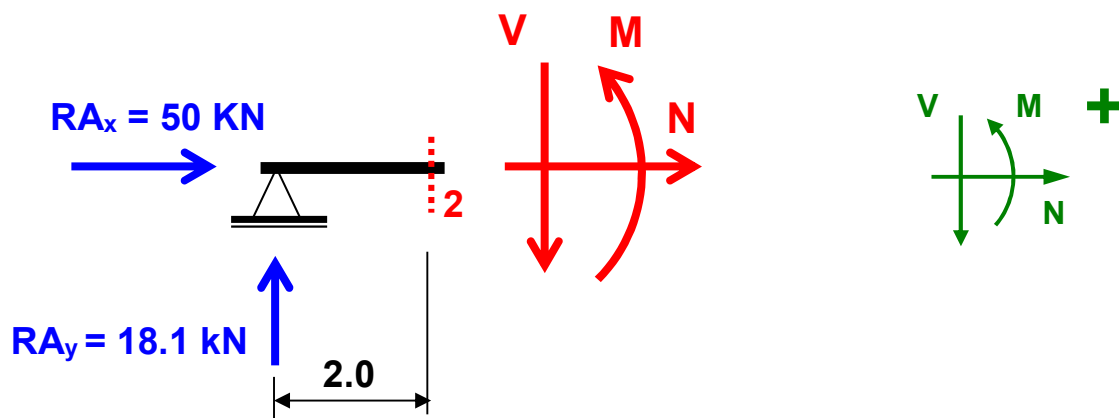
COUPE N° 1



$$\begin{aligned}\Sigma F_N &= 0 & \Rightarrow 50 + N &= 0 \\ \Sigma F_V &= 0 & \Rightarrow -18.1 + V &= 0 \\ \Sigma M_1 &= 0 & \Rightarrow 0 + M &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow N &= -50 \text{ kN} \\ \Rightarrow V &= 18.1 \text{ kN} \\ \Rightarrow M &= 0 \text{ kNm}\end{aligned}$$

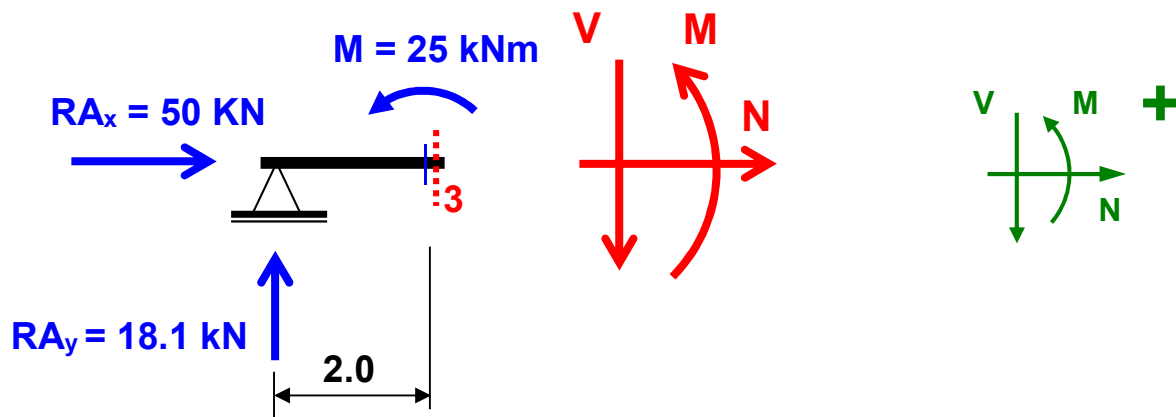
COUPE N° 2



$$\begin{aligned}\Sigma F_N &= 0 & \Rightarrow 50 + N &= 0 \\ \Sigma F_V &= 0 & \Rightarrow -18.1 + V &= 0 \\ \Sigma M_2 &= 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 2.0) + M &= 0\end{aligned}$$

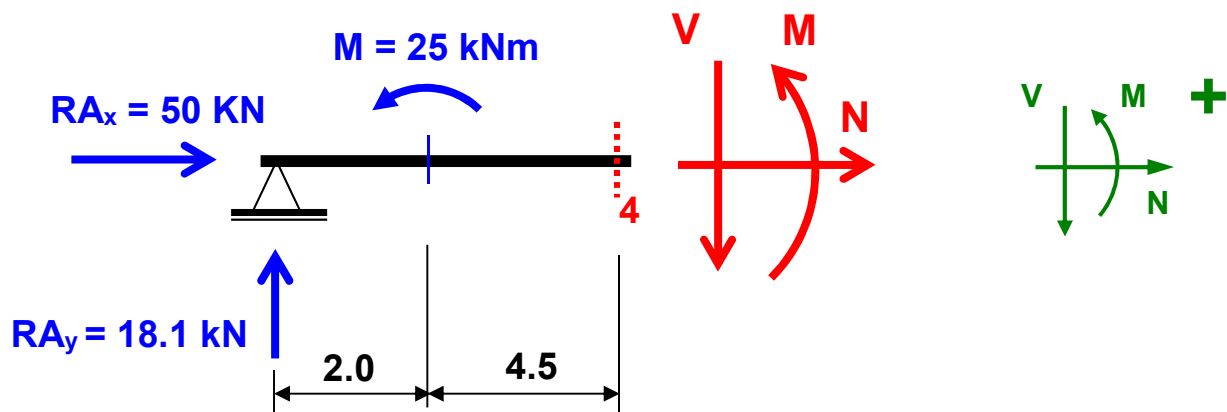
$$\begin{aligned}\Rightarrow N &= -50 \text{ kN} \\ \Rightarrow V &= 18.1 \text{ kN} \\ \Rightarrow M &= 36.2 \text{ kNm}\end{aligned}$$

COUPE N° 3



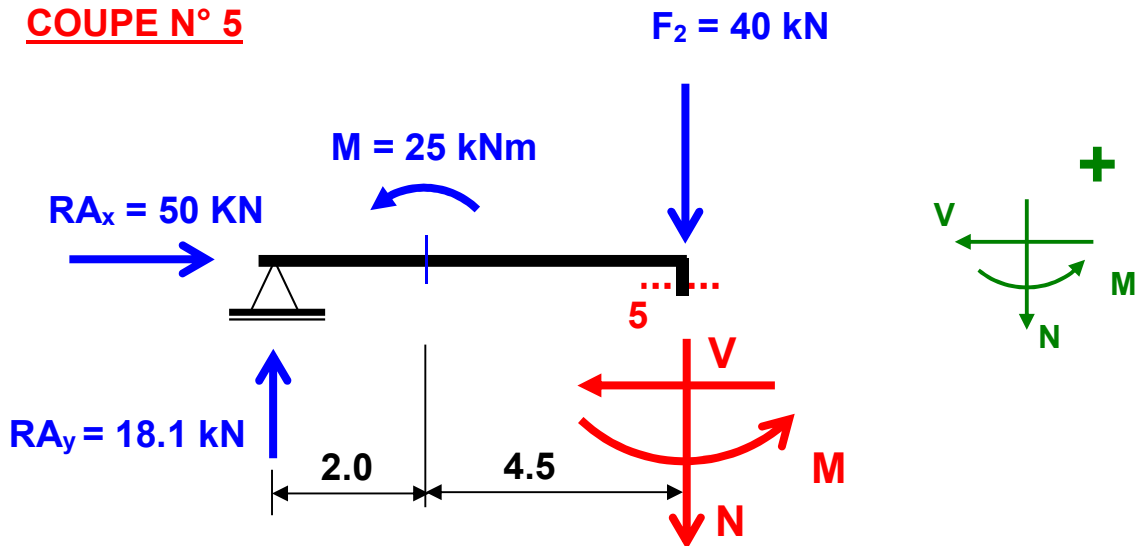
$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow 50 + N = 0 & \Rightarrow N = -50 \text{ kN} \\
 \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -18.1 + V = 0 & \Rightarrow V = 18.1 \text{ kN} \\
 \Sigma M_3 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 2.0) + 25 + M = 0 & \Rightarrow M = 11.2 \text{ kNm}
 \end{array}$$

COUPE N° 4



$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow 50 + N = 0 & \Rightarrow N = -50 \text{ kN} \\
 \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -18.1 + V = 0 & \Rightarrow V = 18.1 \text{ kN} \\
 \Sigma M_4 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 6.5) + 25 + M = 0 & \Rightarrow M = 92.7 \text{ kNm}
 \end{array}$$

COUPE N° 5

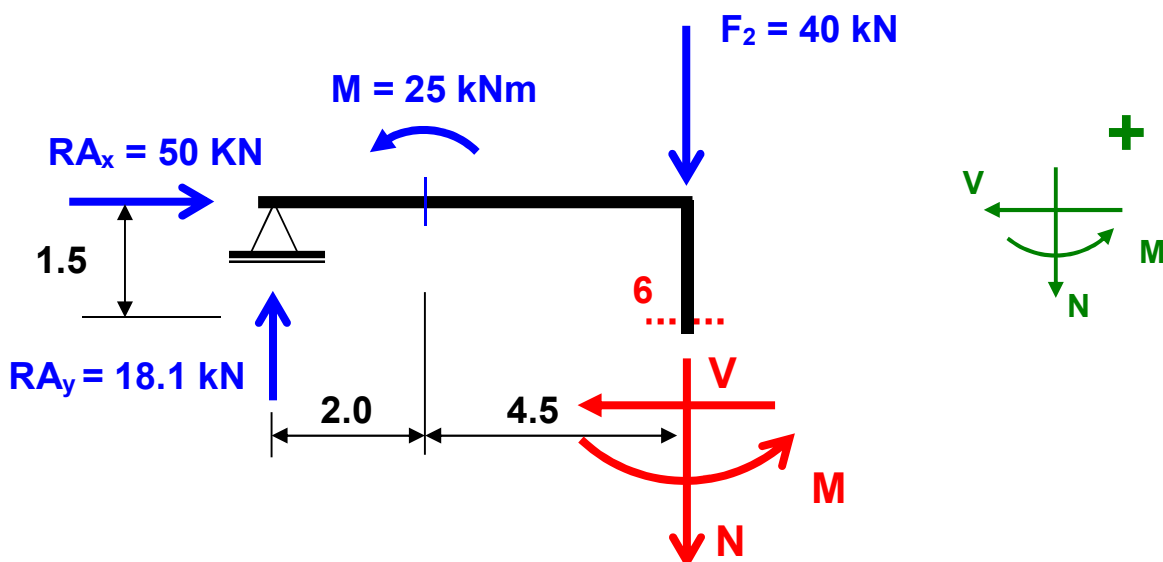


Remarques :

- Les efforts **N-V-M** "tournent" de 90° avec la section ainsi que la convention de signe.
- L'effort N devient V et l'effort V devient N. Le moment reste constant car il y a continuité de l'effort dans les angles de la barre.

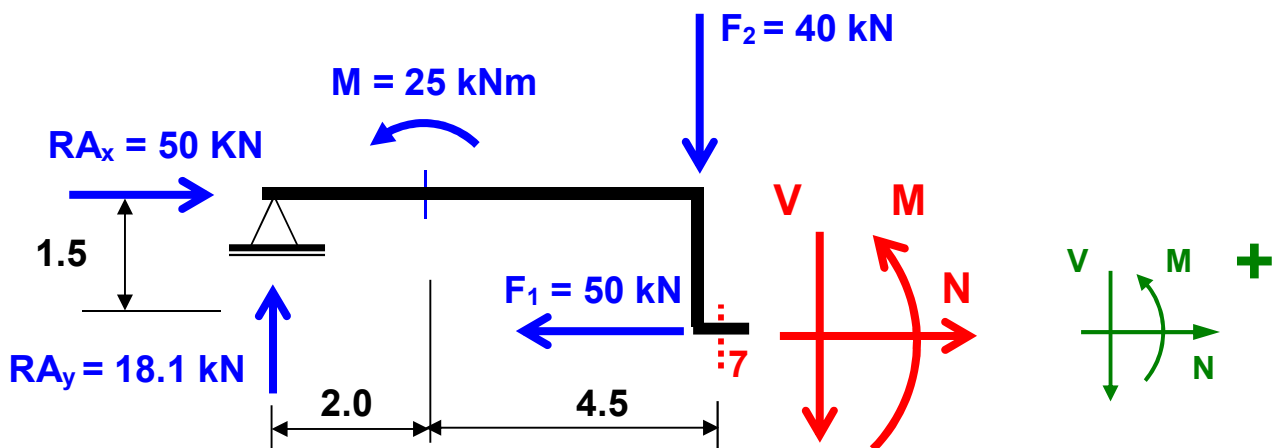
$$\begin{array}{lll} \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow -18.1 + 40 + N = 0 & \Rightarrow N = -21.9 \text{ kN} \\ \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -50 + V = 0 & \Rightarrow V = 50 \text{ kN} \\ \Sigma M_5 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 6.5) + 25 + M = 0 & \Rightarrow M = 92.7 \text{ kNm} \end{array}$$

COUPE N° 6

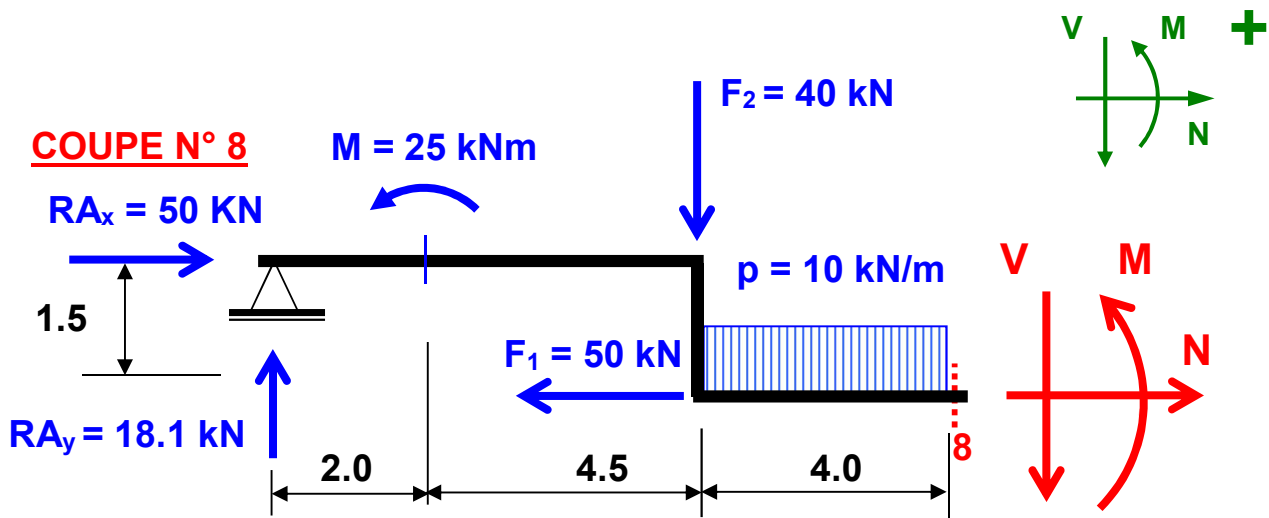


$$\begin{array}{lll} \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow -18.1 + 40 + N = 0 & \Rightarrow N = -21.9 \text{ kN} \\ \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -50 + V = 0 & \Rightarrow V = 50 \text{ kN} \\ \Sigma M_6 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 6.5) + 25 - (50 \cdot 1.5) + M = 0 & \Rightarrow M = 167.7 \text{ kNm} \end{array}$$

COUPE N° 7

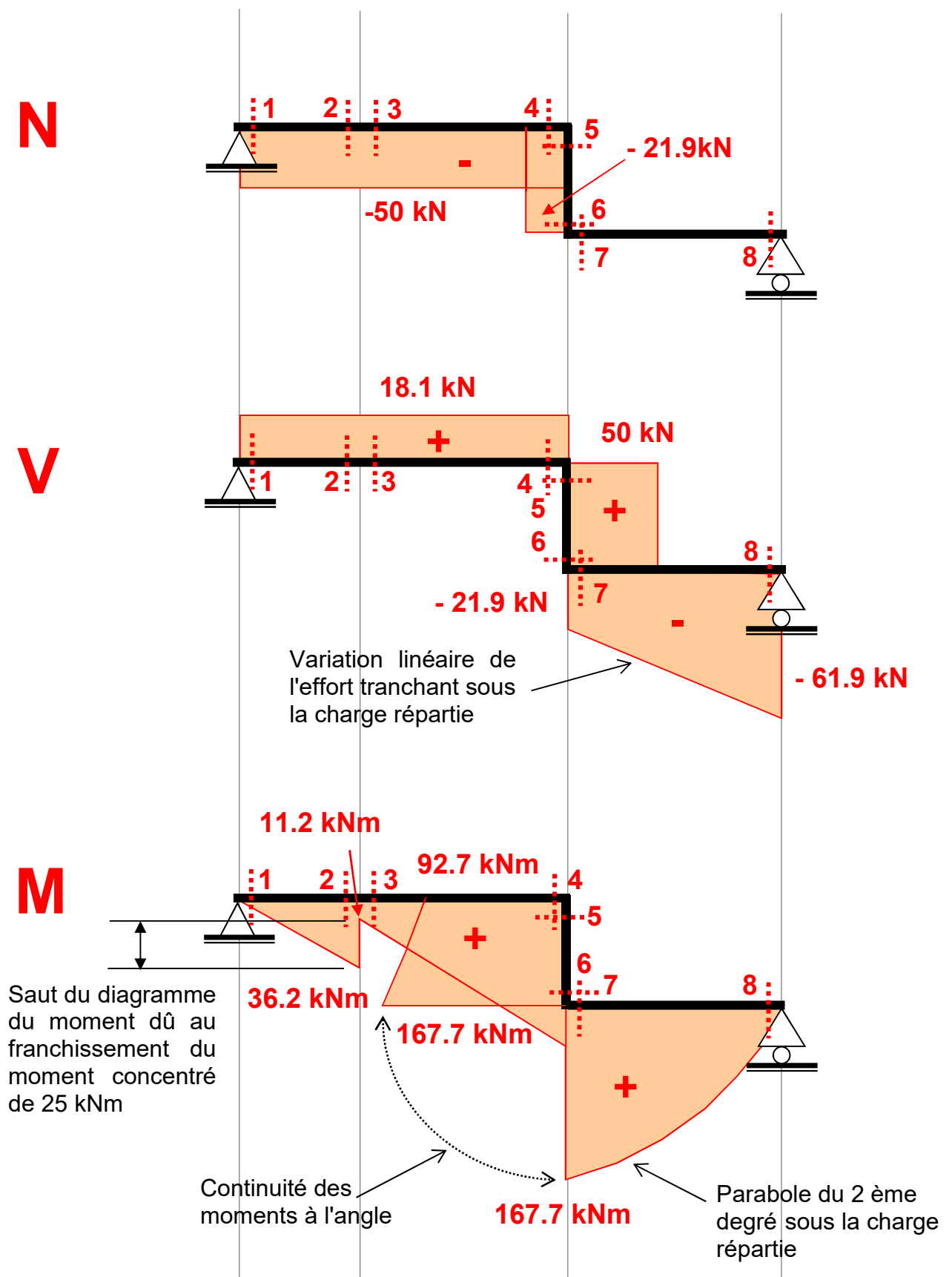


$$\begin{aligned}
 \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow 50 - 50 + N = 0 & \Rightarrow N = 0 \text{ kN} \\
 \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -18.1 + 40 + V = 0 & \Rightarrow V = -21.9 \text{ kN} \\
 \Sigma M_7 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 6.5) + 25 - (50 \cdot 1.5) + M = 0 & \Rightarrow M = 167.7 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_N = 0 & \Rightarrow 50 - 50 + N = 0 & \Rightarrow N = 0 \text{ kN} \\
 \Sigma F_V = 0 & \Rightarrow -18.1 + 40 + (10 \cdot 4) + V = 0 & \Rightarrow V = -61.9 \text{ kN} \\
 \Sigma M_8 = 0 & \Rightarrow -(18.1 \cdot 10.5) + 25 - (50 \cdot 1.5) + (40 \cdot 4) + (10 \cdot 4 \cdot 2) + M = 0 & \Rightarrow M = 0 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

6.3.4 Représentation des diagrammes des efforts intérieurs



6.4 REGLES DE CALCUL ET ASTUCES

- Entre deux coupes, s'il n'y a pas de charge sur la barre ; l'effort normal et l'effort tranchant restent constants, le moment peut varier linéairement.
- Entre deux coupes situées juste à gauche et à droite d'une charge concentrée, l'effort normal et l'effort tranchant font un "saut en valeur" égal à la charge concentrée. Le moment garde la même valeur pour autant que la charge concentrée ne soit pas un moment.
- **Sous une charge répartie**, l'effort tranchant varie linéairement. Le moment varie selon la forme d'une parabole du 2^{ème} degré.
- Dans un angle de structure ou de barre formant un angle de 90°, la valeur de l'effort normal avant l'angle devient la valeur de l'effort tranchant après l'angle et vice-versa. La valeur du moment reste constante afin d'assurer la continuité de l'effort.
- Si les efforts intérieurs relatifs à l'effort normal et à l'effort tranchant sont positifs, les diagrammes se dessinent au-dessus de la barre ; s'ils sont négatifs, ils se dessinent au-dessous de la barre. Le diagramme d'un moment **positif ou négatif se dessine toujours du côté de la fibre tendue de la barre.**
- **La surface générée par le diagramme de l'effort tranchant à gauche d'une section de coupe est égale à la valeur du moment dans cette même coupe.** La surface doit être calculée en tenant compte du signe du diagramme de l'effort tranchant. Suite au constat précédent, le diagramme du moment atteint un **"maximum local"** lorsque le diagramme de l'effort tranchant change de signe. Si la barre possède un moment concentré, celui-ci doit être additionné à la surface du diagramme de l'effort tranchant tout en tenant compte de son signe.
Exemple coupe 3 ; $M = (18.1 * 2.50) - 25 = 11.2 \text{ kNm}$

Exemple : selon la coupe n° 4 de l'exemple numérique

Surface du diagramme de l'effort tranchant $+18.1 \text{ kN} * 6.50 \text{ m} = 117.7 \text{ kNm}$
Moment concentré $- 25.0 \text{ kNm}$

Moment total dans la coupe n° 4

92.70 kNm

7. LES POUTRES A TREILLIS

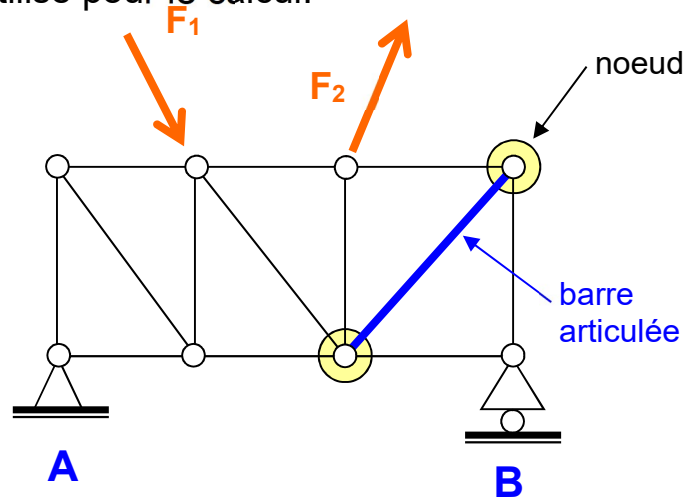
7.1 DEFINITIONS

On appelle indifféremment treillis, treillis articulé, triangulation ou structure réticulée, un ensemble de barres, assemblées les unes aux autres et qui sont articulées à leurs extrémités de manière à former une structure portante stable (non mobile), soit plane, soit spatiale.

Ce type de structure est très utilisé dans tous les domaines de la construction. Les treillis sont le plus souvent exécutés en acier, en aluminium ou en bois, rarement en béton. **Ils permettent une certaine "légèreté" de la structure**, mais ne sont pas toujours très esthétiques. Les treillis plans ne peuvent naturellement être chargés que dans leur plan et les dispositions constructives doivent empêcher tout déplacement hors du plan. On appelle **nœuds** les points de rencontre des barres du treillis ; **on admet que ces nœuds sont des articulations parfaites où les axes des barres concourent sans excentricité**. Les charges extérieures ne devraient agir qu'aux nœuds (forces nodales) puisqu'en principe, la barre ne peut transmettre de force qu'à ses extrémités. Tel est le schéma statique d'un treillis utilisé pour le calcul.



Treillis spatial (3D)

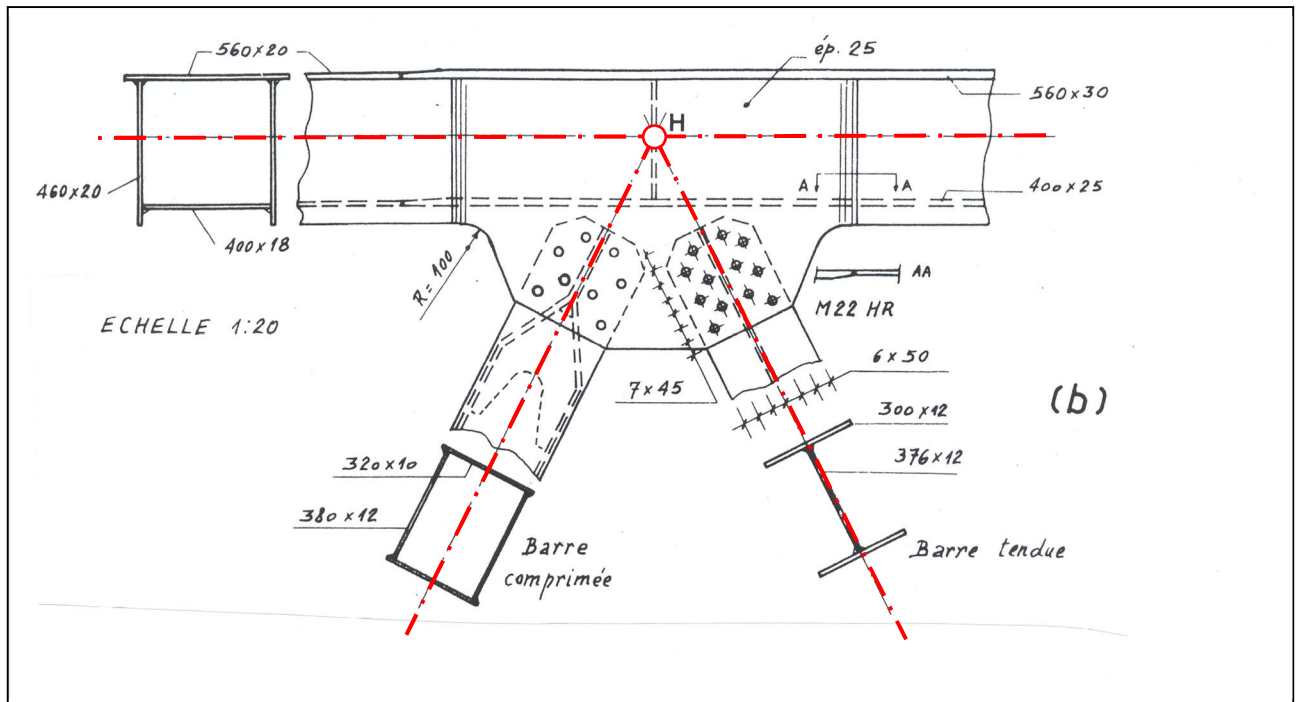


Treillis plan (2D)



- 1 - Légèreté de la structure du pont
- 2 - Franchissement de grande portée au moyen de poutres à treillis en bois

Cette idéalisation ne correspond bien sûr que fort peu à la réalité. Pour exemple prenons un nœud d'une poutre à treillis d'un pont-rail. On constate que les barres sont en fait liées rigidement les unes aux autres. De plus, les barres sont chargées entre les nœuds par leur poids propre. Par contre on constate **que les axes des barres sont bel et bien concourants**.



L'expérience, couplée à des calculs précis a montré cependant que si, dans les constructions réelles :

- Les axes des barres sont concourants
- Les nœuds restent petits et les barres élancées
- Les charges sont transmises aux seuls nœuds

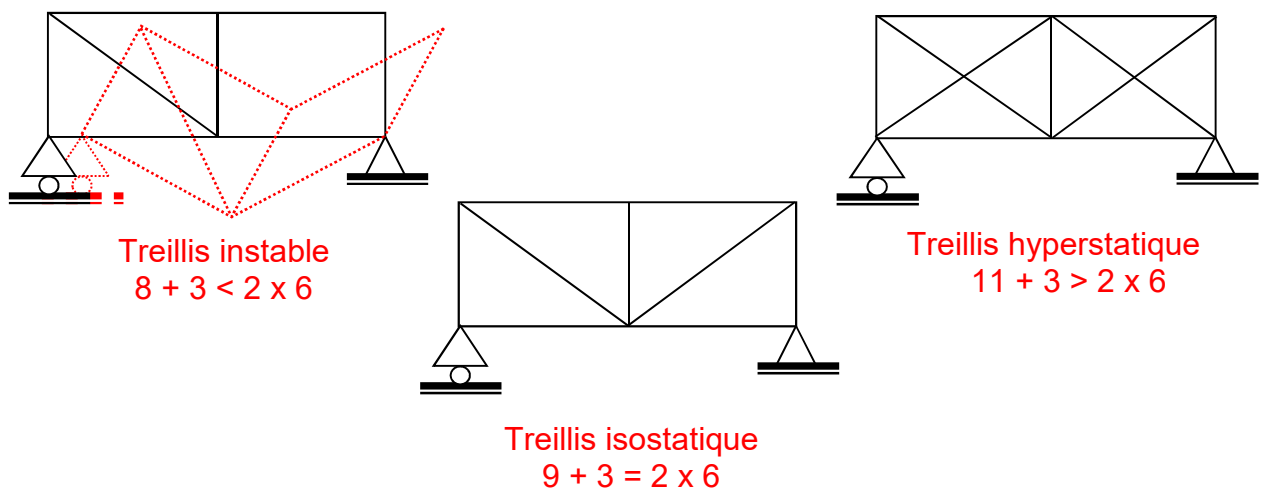
Alors le schéma statique défini précédemment donne des résultats très satisfaisants. **C'est-à-dire que les barres d'un treillis sont essentiellement sollicitées par un effort axial soit de traction, soit de compression.** Les imperfections constructives (nœuds rigides, poids propre...) n'induisent que des efforts dits secondaires qui sont la plupart du temps négligeables.

7.2 STABILITE D'UN TREILLIS

Avant tout calcul d'un treillis, il y a lieu de vérifier si celui-ci est stable. La relation suivante doit être remplie pour les treillis plans :

nb. de barres + nb. de réactions d'appuis = 2 * nb. de nœuds
De plus, les barres d'un treillis doivent toujours former entre elles un "triangle"

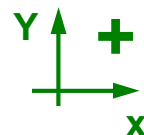
Si le nombre de barres + le nombre de réactions d'appuis est $< 2 \times$ le nombre de nœuds, le treillis est instable et s'effondre. Dans le cas contraire, il est hyperstatique et nous ne sommes pas capables de le calculer.



7.3 CALCUL D'UN TREILLIS

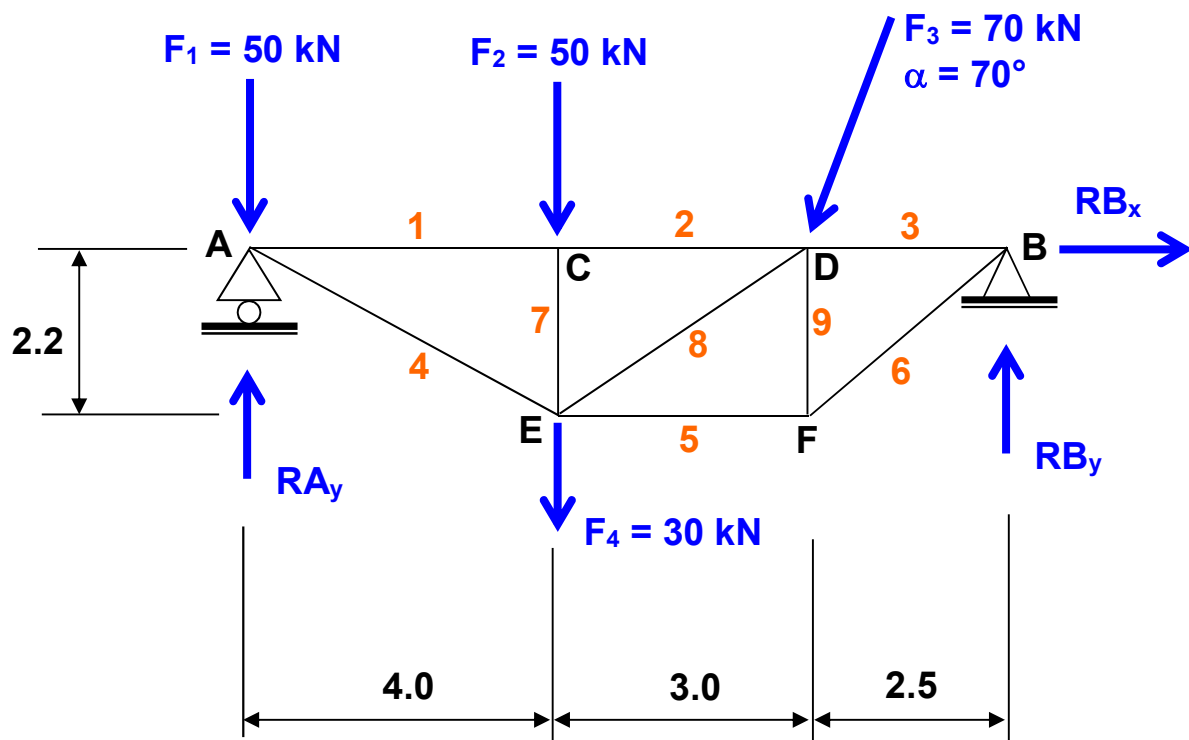
Comme nous l'avons vu précédemment, chaque barre d'un treillis ne peut transmettre qu'un effort de traction ou de compression. Par conséquent, l'équilibre d'un nœud de treillis est assuré si la somme des efforts des barres liées au nœud respecte les conditions d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0\end{aligned}$$



L'équilibre du nœud peut se faire graphiquement ou analytiquement. La méthode graphique porte le nom de Cremona du nom de son concepteur.

7.4 EXEMPLE DE CALCUL D'UN TREILLIS



7.4.1 Calcul des réactions d'appuis

Le système global est-il isostatique ?

=> OK

Le treillis est-il stable ?

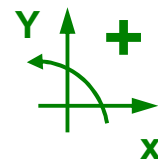
=> $9 + 3 = 2 \times 6$

$$\Sigma \text{ Forces } x = 0$$

$$\Sigma \text{ Forces } y = 0$$

$$\Sigma \text{ Moments }_{A/B} = 0$$

convention de signe



Solution :

$$R_{Ay} = 113.60 \text{ kN}$$

$$R_{By} = 82.20 \text{ kN}$$

$$R_{Bx} = 23.90 \text{ kN}$$

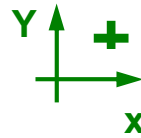
7.4.2 Numérotation des nœuds et des barres

Numérotation des nœuds et des barres selon le schéma ci-dessus

7.4.3 Equilibre des nœuds

Conditions d'équilibre des nœuds

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0\end{aligned}$$

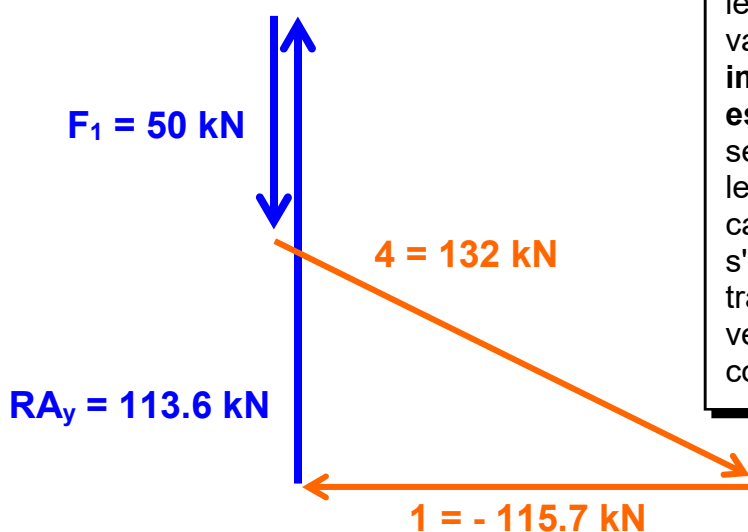


Pour déterminer l'équilibre d'un nœud, il faut qu'il y ait au maximum **2 efforts** inconnus car nous ne possédons que 2 équations d'équilibres. Il faut donc commencer les calculs par un nœud qui ne possède pas plus de 2 barres inconnues. La démonstration commencera par l'équilibre graphique des nœuds au moyen de la méthode de Cremona.

7.4.3.1 Méthode graphique

Pour résoudre le problème, il faut exécuter l'équilibre graphique des nœuds un par un. L'orientation des barres est connue par le biais d'un dessin du treillis à l'échelle. Chaque nœud doit être en équilibre ce qui induit que la résultante du nœud est égale à zéro. Chaque force mise bout à bout forme un dynamisme fermé ; la dernière force arrive au pied de la première force. Les forces inconnues doivent fermer le dynamisme.

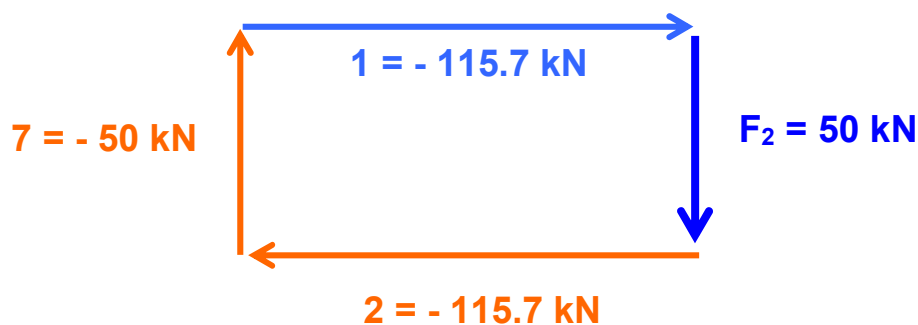
NŒUD A => 2 barres inconnues n°1 et 4 => OK



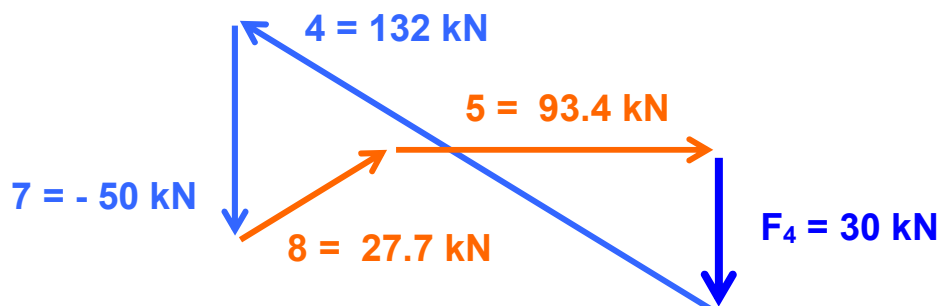
Le dynamisme est fermé par les barres inconnues 1 et 4. Il suffit alors de mesurer les longueurs des forces pour obtenir la valeur des efforts. **Le sens des efforts est important pour déterminer si la barre est en traction ou en compression.** Le sens de la flèche indique si la barre tire sur le nœud ou si elle le retient. Dans notre cas, la barre 4 tire sur le nœud ; elle s'éloigne du nœud => la barre est en traction, la barre 1 retient le nœud ; elle va vers le nœud => la barre est en compression.

NŒUD C $\Rightarrow$ 2 barres inconnues n° 2 et 7 $\Rightarrow$ OK

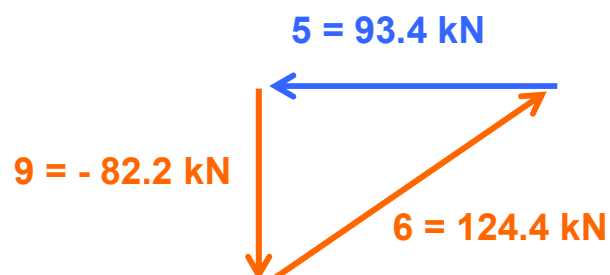
Pour tirer ou retenir un nœud, une barre a besoin de s'appuyer sur le nœud situé à l'autre extrémité de la barre. C'est pourquoi la barre n° 1 doit s'appuyer sur le nœud 2 pour pouvoir retenir le nœud 1. Son sens sera donc orienté vers le nœud 2.
C'est aussi le principe d'action = réaction.



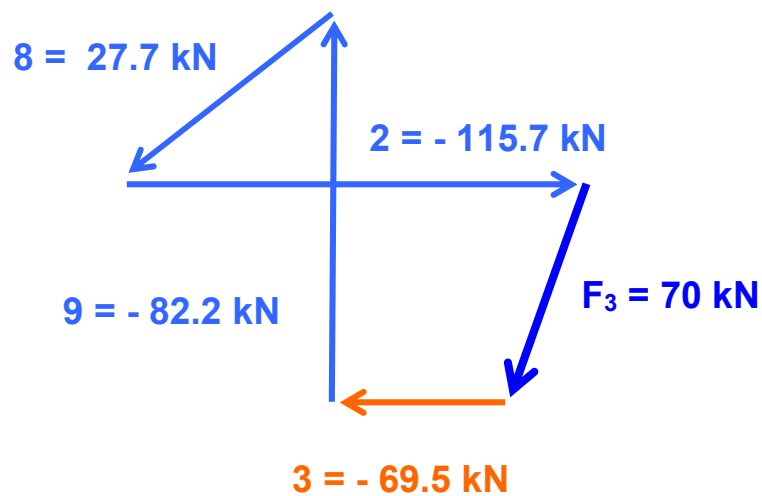
NŒUD E $\Rightarrow$ 2 barres inconnues n° 5 et 8 $\Rightarrow$ OK



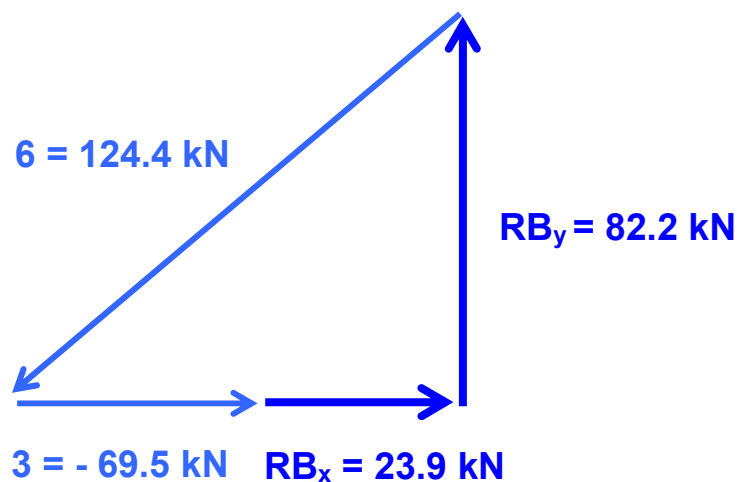
NŒUD F $\Rightarrow$ 2 barres inconnues n° 6 et 9 $\Rightarrow$ OK



NŒUD D => 1 barres inconnue n° 3 => OK



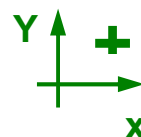
NŒUD B => aucune barre inconnue => contrôle de l'équilibre



7.4.3.2 Méthode analytique

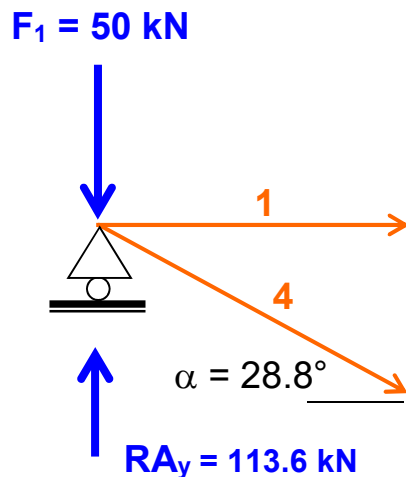
La méthode analytique est relativement simple à exécuter. Il suffit d'isoler un nœud avec au maximum **2 barres inconnues** et d'appliquer les équations de l'équilibre :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0\end{aligned}$$



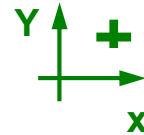
La démonstration sera faite uniquement pour le nœud 1 et 5

NŒUD A $\Rightarrow$ 2 barres inconnues n° 1 et 4 $\Rightarrow$ OK



$\Sigma \text{ Forces } x = 0$

$$F_4 \cos 28.8^\circ + F_1 = 0$$



$\Sigma \text{ Forces } y = 0$

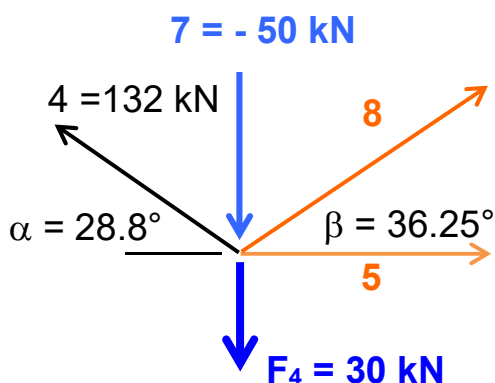
$$113.6 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - F_4 \sin 28.8^\circ = 0$$

$$F_4 = 63.60 \text{ kN} / \sin 28.8^\circ = 132 \text{ kN}$$

$$F_1 = -132 * \cos 28.8^\circ = -115.7 \text{ kN}$$

Le signe négatif de F_1 indique que le sens de l'effort que nous avons admis à priori au départ est de sens contraire en réalité.

NŒUD E $\Rightarrow$ 2 barres inconnues n° 8 et 5, les barres 4 et 7 sont connues $\Rightarrow$ OK



$\Sigma \text{ Forces } x = 0$

$$-132 \text{ kN} \cos 28.8^\circ + F_8 \cos 36.25^\circ + F_5 = 0$$

$\Sigma \text{ Forces } y = 0$

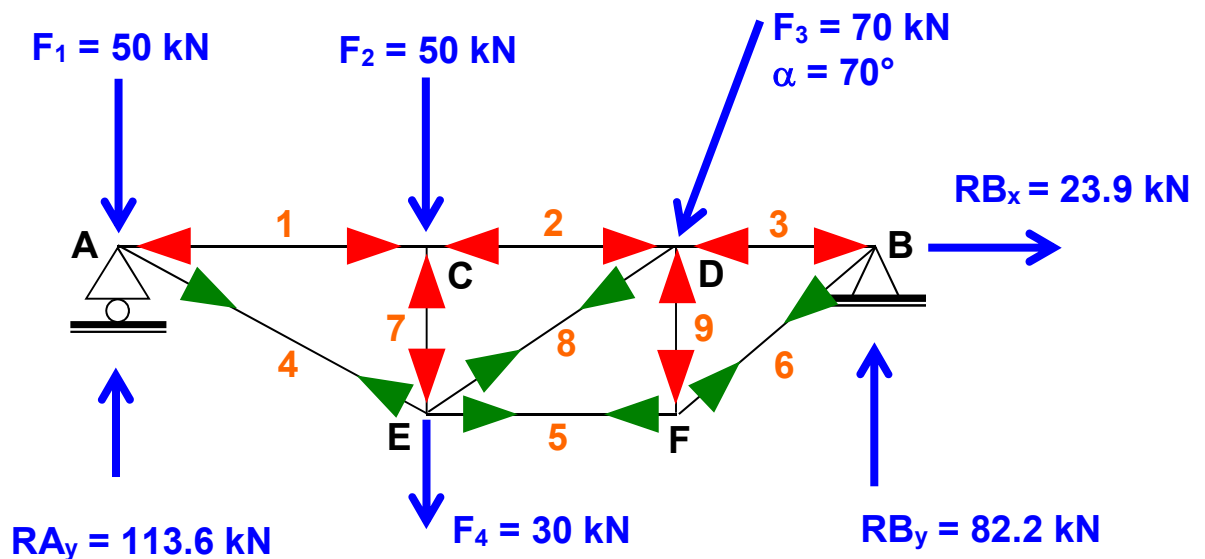
$$132 \text{ kN} \sin 28.8^\circ - 50 \text{ kN} + F_8 \sin 36.25^\circ - 30 \text{ kN} = 0$$

Solution:

$$F_8 = 27.7 \text{ kN}$$

$$F_5 = 93.4 \text{ kN}$$

7.4.4 Résultats globaux du calcul



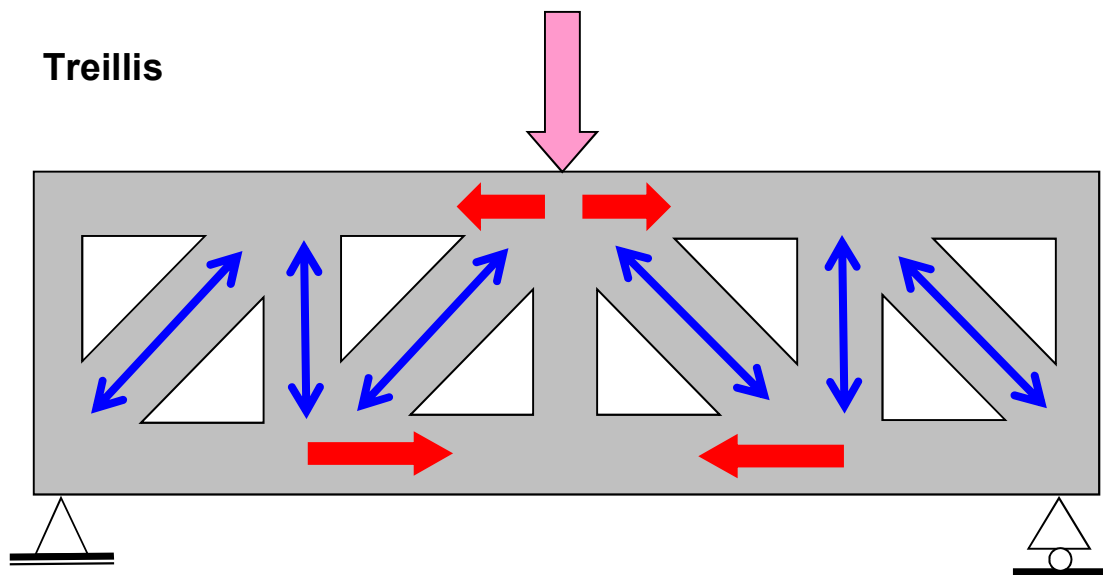
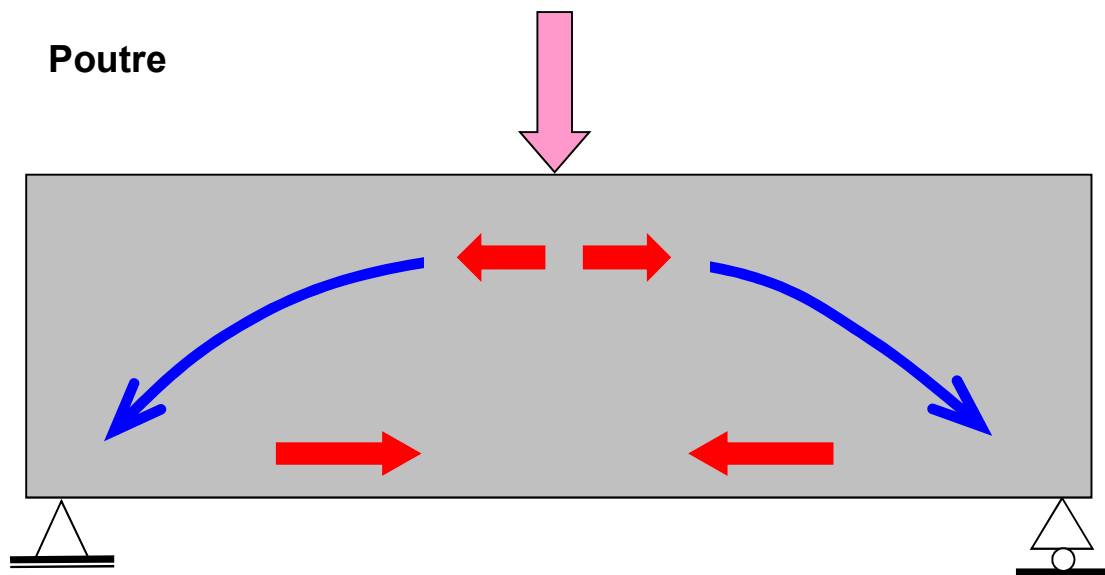
Résultats		
$F_1 = -115.7 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ compression	
$F_2 = -115.7 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ compression	
$F_3 = -69.5 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ compression	
$F_4 = 132.0 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ traction	
$F_5 = 93.4 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ traction	
$F_6 = 124.4 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ traction	
$F_7 = -50.0 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ compression	
$F_8 = 27.7 \text{ kN}$	$\Rightarrow$ traction	

Remarques générales

La méthode graphique est plus simple et plus rapide que la méthode analytique. Hélas aujourd'hui, avec l'aide des ordinateurs, cette méthode est quelque peu abandonnée.

Dans un système à treillis, le moment est en principe "repris" par les membrures supérieures et inférieures alors que l'effort tranchant est "repris" par les diagonales et les montants du treillis.

On peut ainsi "éviter" une poutre jusqu'à la transformer en treillis selon le schéma ci-dessous.



Forces intérieures dues à la flexion

Forces intérieures dues à l'effort tranchant

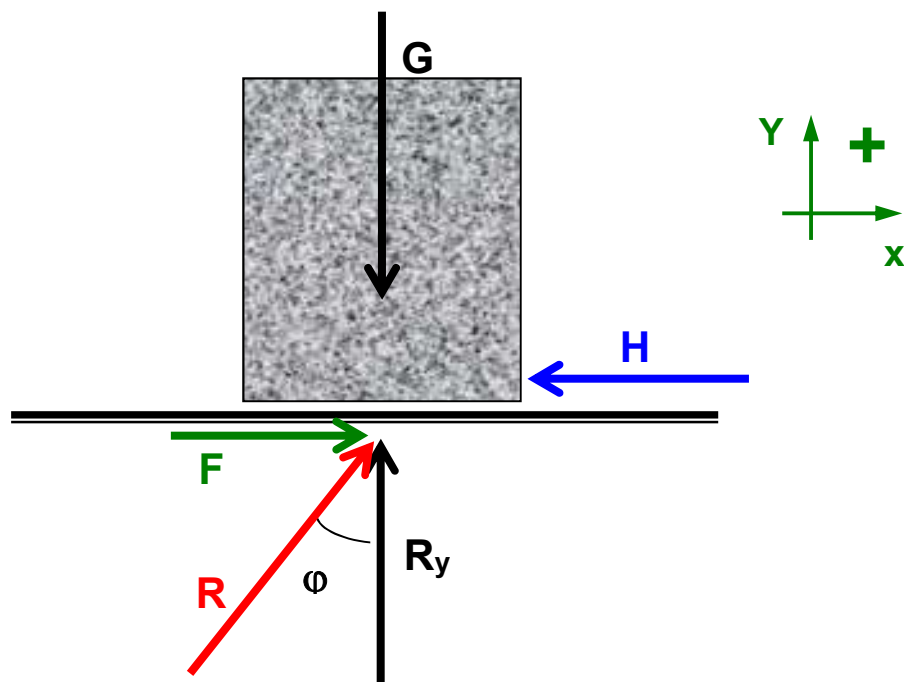
8. LE FROTTEMENT SEC

8.1 DEFINITIONS

Le frottement est la résistance qui s'oppose au déplacement relatif de deux solides en contact. Dans le cas "idéal" de surfaces parfaitement lisses, cette résistance serait nulle, ce qui est irréalisable en pratique.

Le frottement dépend du type de mouvement (translation, rotation, roulement, pivotement, etc.), de la vitesse, de la présence éventuelle d'un lubrifiant (frottement sec ou lubrifié), de l'état des surfaces en contact et de la température. C'est un phénomène complexe. On rappelle simplement ici la **loi de Coulomb** qui régit de façon peu exacte mais toutefois simple et suffisante en première approximation - **le frottement de glissement sec à l'état de repos.**

Soit un solide posé sur un plan, G son poids, et R_y la réaction verticale globale du plan. Appliquons une force H sur ce solide au niveau du plan. L'expérience montre que le solide reste en équilibre (immobile) tant que cette force ne dépasse pas une certaine limite H_{lim} .



Donc, pour $H < H_{lim}$, il naît une force de frottement F égale et opposée à H , telle que les conditions d'équilibre suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ Forces } x &= F - H &= 0 &\Rightarrow \text{donc } F = H \\ \Sigma \text{ Forces } y &= -G + R_y &= 0 &\Rightarrow \text{donc } R_y = G\end{aligned}$$

La force F tend à s'opposer au mouvement que le solide prendrait si la surface était lisse. Cet état détermine le sens de F . Pour $H = H_{\text{lim}}$, le corps est encore juste en équilibre, prêt à se mettre en mouvement ; **c'est l'état d'équilibre limite**. A cet instant, $F_{\text{max}} = H_{\text{lim}}$, et on appelle angle de frottement φ (fi), **l'angle de la résultante globale R avec R_y** .

Pour avoir l'équilibre, il faut donc que $F \leq R_y \tan \varphi$. Enfin on appelle coefficient de frottement le nombre sans dimension :

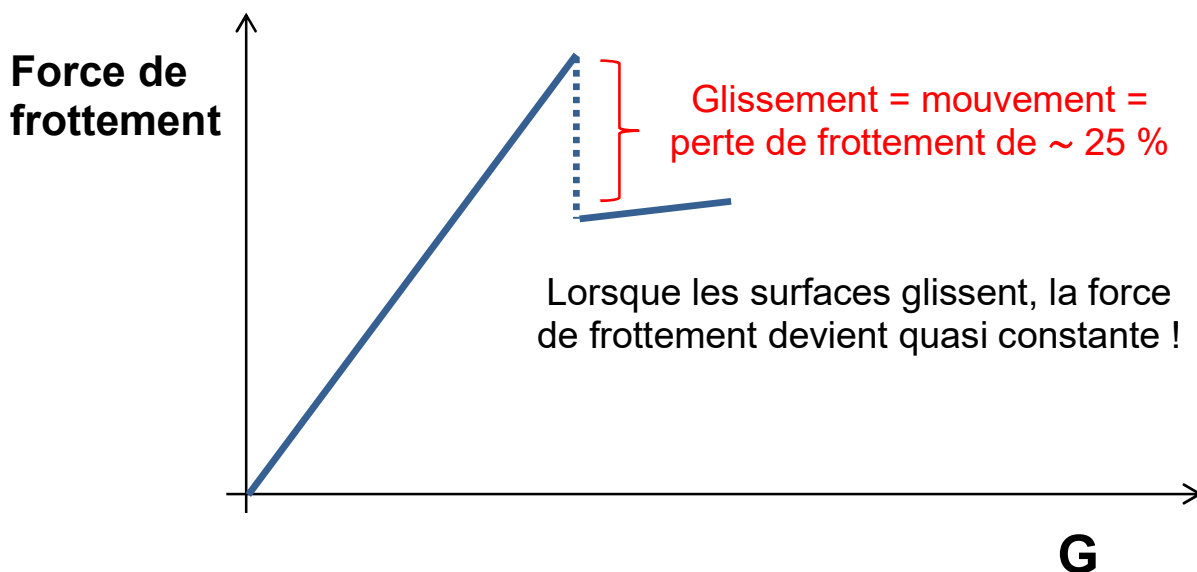
$$\mu \text{ (mu)} = \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \text{ce qui donne } F \leq R_y * \mu$$

Les expériences réalisées par Coulomb ont montré que :

- μ est indépendant de la forme et de la grandeur de la surface de contact
- μ dépend de la qualité des surfaces de contact (aspérité...)
- μ ne dépend pas de H

Le coefficient de frottement cinétique avec glissement des surfaces est environ 25 % plus faible que le coefficient de frottement statique. Cette différence se schématise par le graphique suivant :



A titre d'exemple nous donnons quelques valeurs du coefficient de frottement (à utiliser avec prudence)

Surfaces en contact	μ statique	μ cinétique
Acier sur acier sec	0.30	0.20
Acier sur acier visqueux	0.10	0.05
Acier sur bois	0.20 à 0.60	-
Acier sur glace	0.04	-
Aluminium sur aluminium	1.10	-
Aluminium sur acier	0.61	0.47
Câble acier sur poulie acier	0.20	0.15
Bois sur bois	0.25 à 0.50	-
Caoutchouc sur acier	0.40	0.30
Caoutchouc sur béton	0.50 à 0.90	-
Caoutchouc sur glace	0.05 à 0.30	-
Pneus en bon état sur pavage sec	0.90	0.80
Pneus usés sur pavage humide	0.10 à 0.20	0.05 à 0.12
Téflon sur téflon	0.04	-
Téflon sur acier	0.04	0.04
Béton sur terre	0.50 à 0.60	-

8.2 EXEMPLE DE CALCUL D'UN FROTTEMENT

Quelle force faut-il pour déplacer par glissement un bloc de granit de 5 m³ reposant sur de la terre ? (Granit = 27 kN/m³)

$$F \approx G * \mu \text{ (béton sur terre)} = 5 \text{ m}^3 * 27 \text{ kN/m}^3 * 0.6 = 81 \text{ kN}$$

Ce petit exemple montre qu'un bloc de pierre d'un certain poids pourrait servir d'amarrage pour une construction provisoire pour autant que **le câble d'amarrage agisse horizontalement**. Dans un tel cas, il faudrait avoir une certaine marge de sécurité vis-à-vis du glissement. **Un coefficient de sécurité de 1.50 doit être utilisé dans le cas du glissement.**

9. EQUILIBRE STATIQUE GLOBAL

9.1 DEFINITIONS

Tout ou partie d'une structure doit, sous l'action des forces qui la sollicitent, **rester globalement en équilibre**, c'est-à-dire globalement immobile. Si certaines forces varient, cet état de stabilité d'ensemble peut ne plus être réalisé ; la structure se mettra alors en mouvement. **On appelle équilibre limite, le dernier état stable de la structure précédant le mouvement.**

Le mouvement d'ensemble peut être une translation (glissement) ou une rotation (renversement). Les forces et les moments qui tendent à créer le mouvement s'appellent des forces et des moments déstabilisants et ceux qui s'y opposent s'appellent des forces et des moments stabilisants.

L'équilibre statique global est régi par les inégalités suivantes :

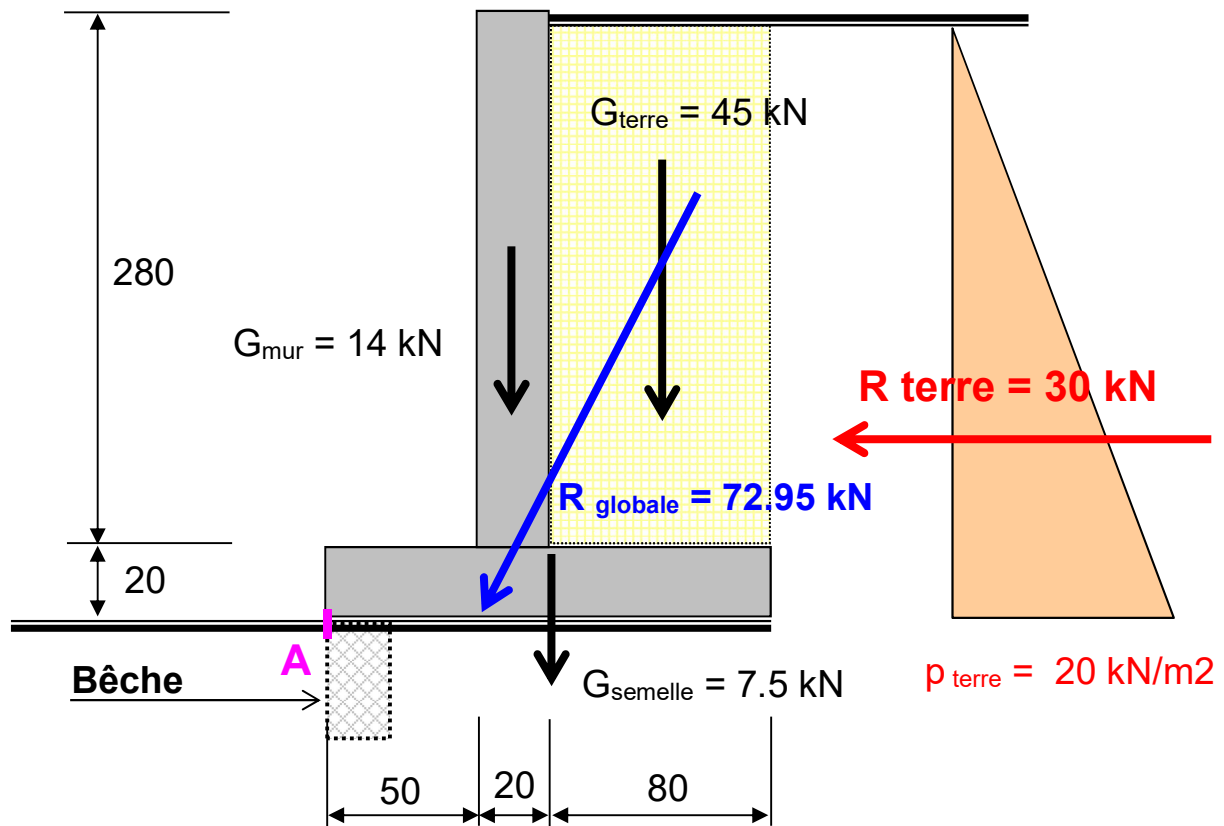
$$\begin{array}{lll} F \text{ stabilisantes} & \geq & F \text{ déstabilisantes} \quad \Rightarrow \text{Equilibre en translation} \\ M \text{ stabilisants} & \geq & M \text{ déstabilisants} \quad \Rightarrow \text{Equilibre en rotation} \end{array}$$

En pratique, l'effet stabilisant doit être supérieur à l'effet déstabilisant de sorte que les rapports entre **les forces stabilisatrices et déstabilisatrices doivent être supérieurs à l'unité**. Pour avoir une sécurité raisonnable, le milieu de la construction utilise les coefficients de sécurité suivants :

$$\begin{array}{ll} \frac{F \text{ stabilisantes}}{F \text{ déstabilisantes}} & \geq 1.5 \\ \frac{M \text{ stabilisants}}{M \text{ déstabilisants}} & \geq 1.5 \end{array}$$

9.2 EXEMPLE DE CALCUL D'UN MUR DE SOUTÈNEMENT

Densité du béton	25 kN/m ³
Densité de la terre	20 kN/m ³
Coefficient de poussée active	0.333
Frottement béton sur terre	0.60



$$\Sigma \text{ Forces stabilisantes}_{\text{glissement}} : (14 + 45 + 7.5) * 0.60 = 39.90 \text{ kN}$$

$$\Sigma \text{ Forces déstabilisantes}_{\text{glissement}} : 20 * 3 * 0.333 * 3 / 2 = 30.00 \text{ kN}$$

$$\Sigma \text{ Moments stabilisants}_{\text{point A}} : (7.5 * 0.75) + (14 * 0.60) + (45 * 1.10) = 63.50 \text{ kNm}$$

$$\Sigma \text{ Moments déstabilisants}_{\text{point A}} : (30 * 3 / 3) = 30.00 \text{ kNm}$$

Contrôle de l'équilibre global

$$\frac{F \text{ stabilisantes : } 39.90 \text{ kN/m}}{F \text{ déstabilisantes : } 30.00 \text{ kN/m}} = 1.33 \quad \Rightarrow \text{le mur ne glisse pas}$$

$$\frac{M \text{ stabilisants : } 63.50 \text{ kNm}}{M \text{ déstabilisants : } 30.00 \text{ kNm}} = 2.11 \quad \Rightarrow \text{le mur ne se renverse pas}$$

Conclusions

Le mur ne glisse pas mais la sécurité est trop faible. Une bêche devrait être réalisée dans la semelle. Dans cet exemple, nous avons négligé la terre en butée. Ceci est réaliste car il se peut qu'un jour ou l'autre on fasse des travaux au pied du mur d'où la situation de notre exemple.

Le mur est stable vis-à-vis du renversement avec une sécurité confortable.

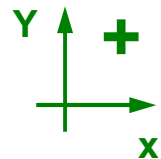
La résultante globale des forces agissant sur le mur vaut :

$$R_y = 14 + 45 + 7.5 = 66.50 \text{ kN}$$

$$R_x = - 30.00 \text{ kN}$$

$$R_{\text{globale}} = 72.95 \text{ kN}$$

$$e_A = M_{\text{total en A}} / R_y = (63.50 - 30) / 66.5 = 0.50 \text{ m}$$



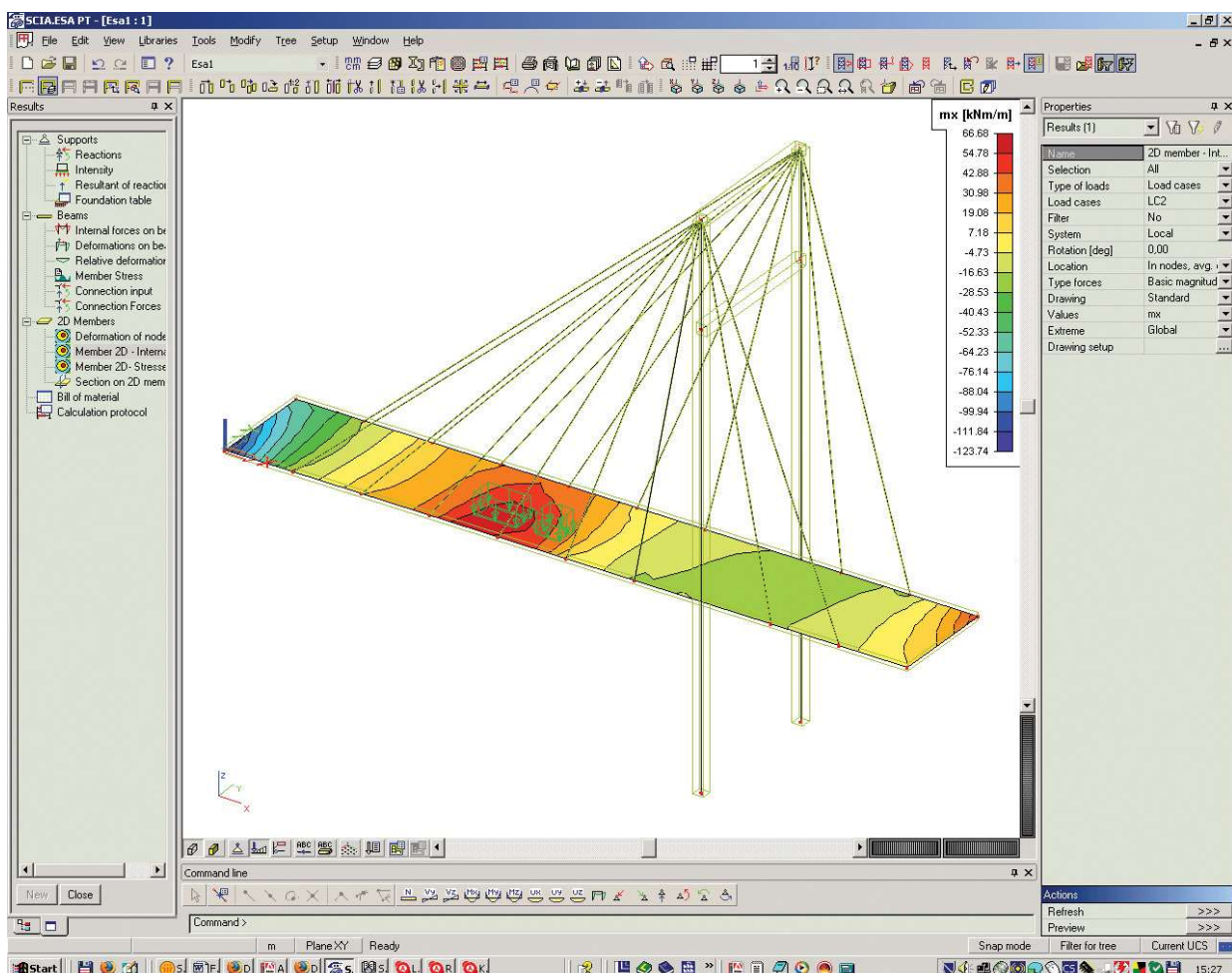
Le mur se renverserait si la résultante globale des forces agissant sur le mur se trouvait à l'extérieur de la semelle ; à gauche du point A.

10. DEMONSTRATION D'UN PROGRAMME DE STATIQUE

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons voir de manière simplifiée avec l'aide du beamer les possibilités de calcul d'un programme de statique moderne. Pour cette démonstration, nous utiliserons le logiciel **SCIA Engineer**.

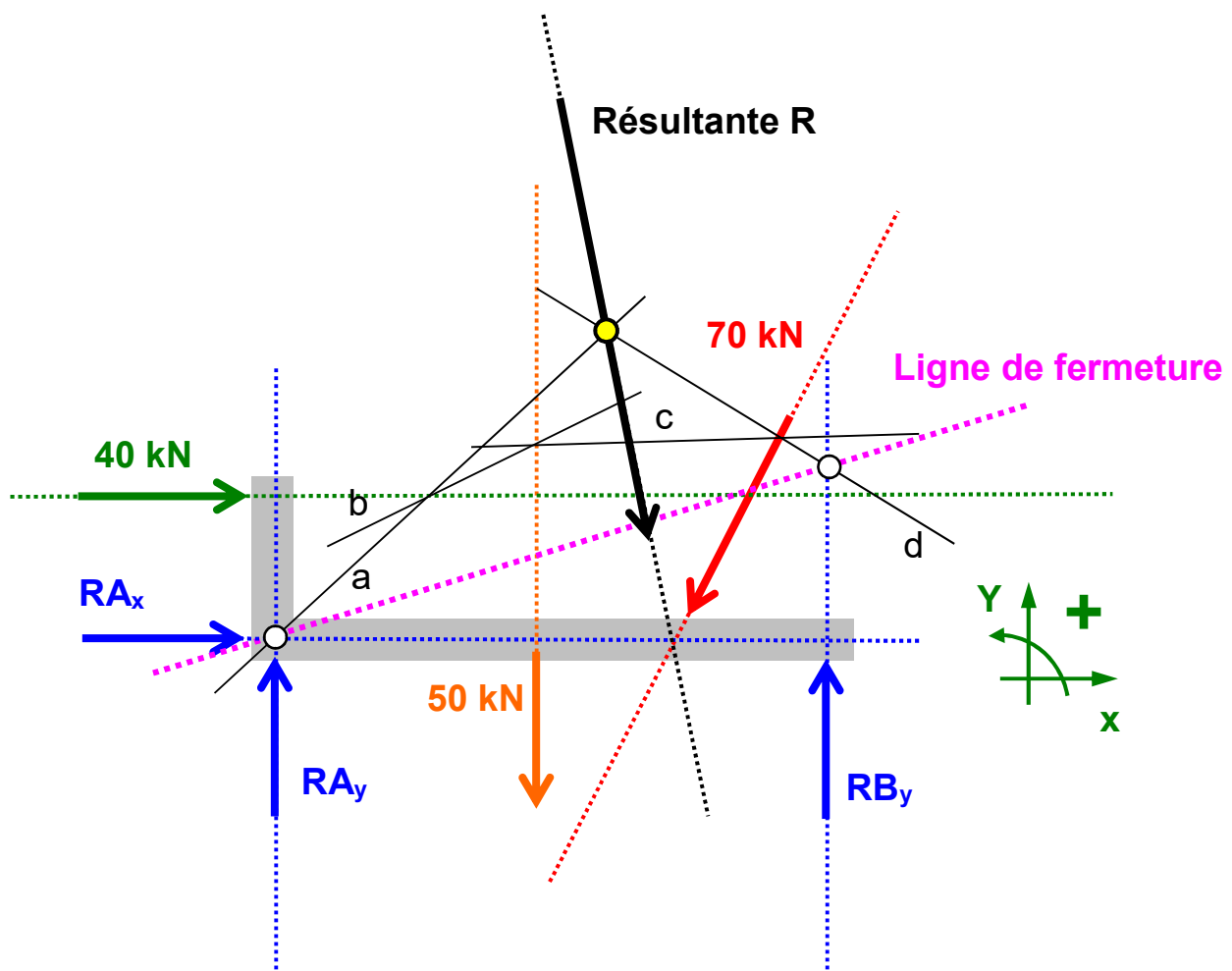
Ce programme est très complet ; il permet de calculer des structures à 2 dimensions ou 3 dimensions composées de barres, de plaques ou de coques. Afin de ne pas nous égarer dans des calculs trop complexes, nous nous bornerons à modéliser les petites structures que nous avons calculées manuellement durant le cours de statique. Nous verrons notamment, le calcul des efforts intérieurs et le calcul d'un système triangulé. Nous effectuerons une modélisation complète des systèmes avec introduction de la géométrie, des appuis et des charges.

Capture d'écran du programme SCIA Engineer



11. EXERCICES

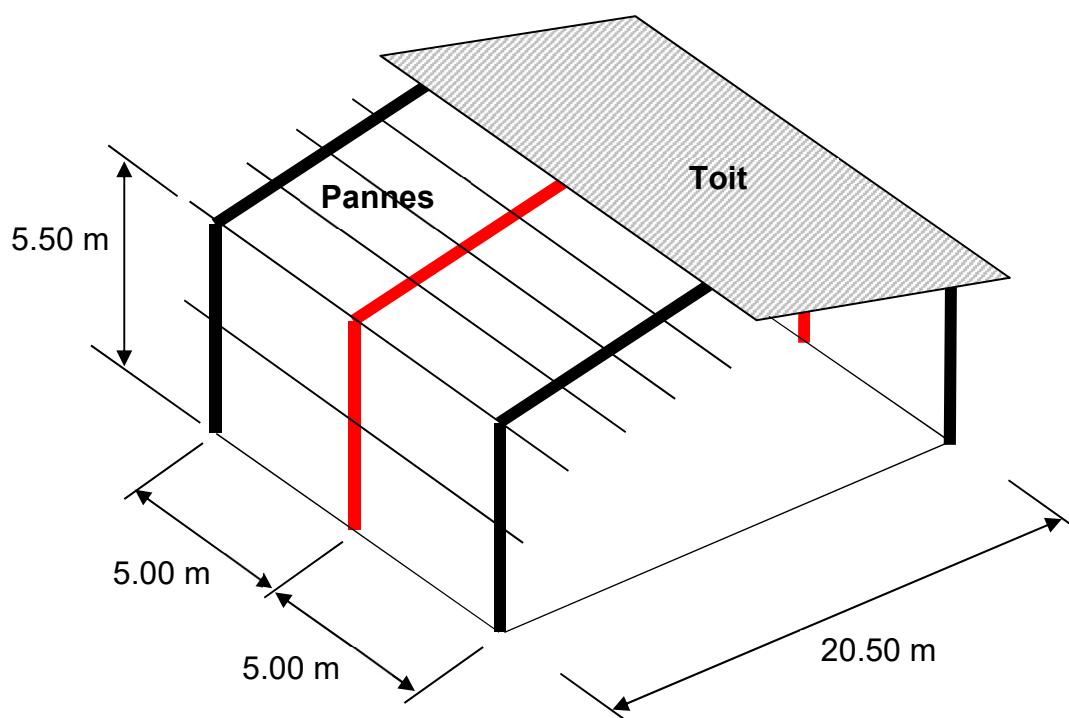
Les exercices des pages suivantes seront commencés et commentés en classe avec l'assistance du professeur. Ils seront terminés par l'étudiant pour le cours suivant et corrigés en classe.



EXERCICE DE STATIQUE N° 1

Concepts, forces et charges

1- Calculez les charges de poids propre, de neige et de vent que devra supporter **un cadre** d'une halle en bois qui sera construite au Brassus dans la vallée de Joux (altitude 1050 m). La halle aura une longueur totale de 35.00 m et la pente du toit sera de 10 % (pour le calcul on admettra 0%). La toiture est composée de panneaux sandwich de 180 mm d'épaisseur (30 kg/m²). Le poids de la structure en bois peut être estimé à 50 kg/m². Représentez schématiquement chaque charge en coupe agissant sur le cadre rouge.



Cadres en bois lamellé-collé

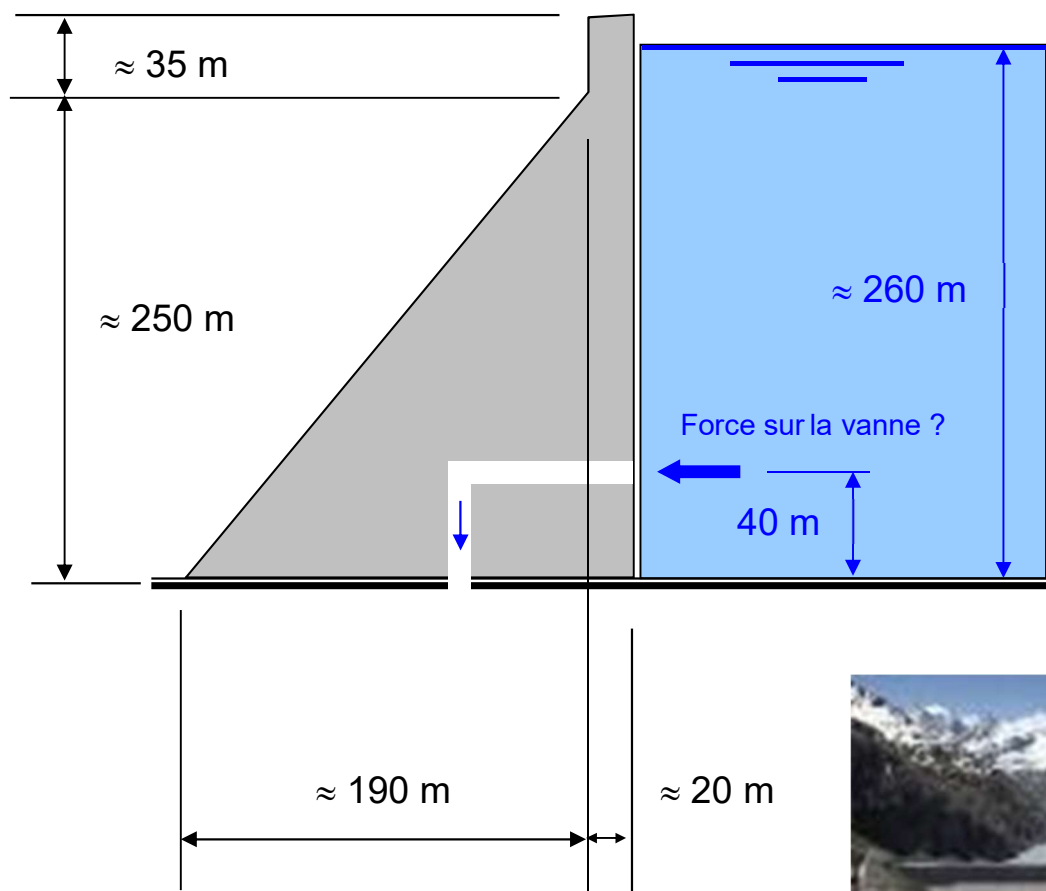
EXERCICE DE STATIQUE N° 2

Concepts, forces et charges

1 - Calculez la pression totale de l'eau (résultante) et le poids du barrage de la **Grande-Dixence** pour une tranche de 1 m de profondeur.

Quelle est la pression sur la vanne de fond en N/mm² ?

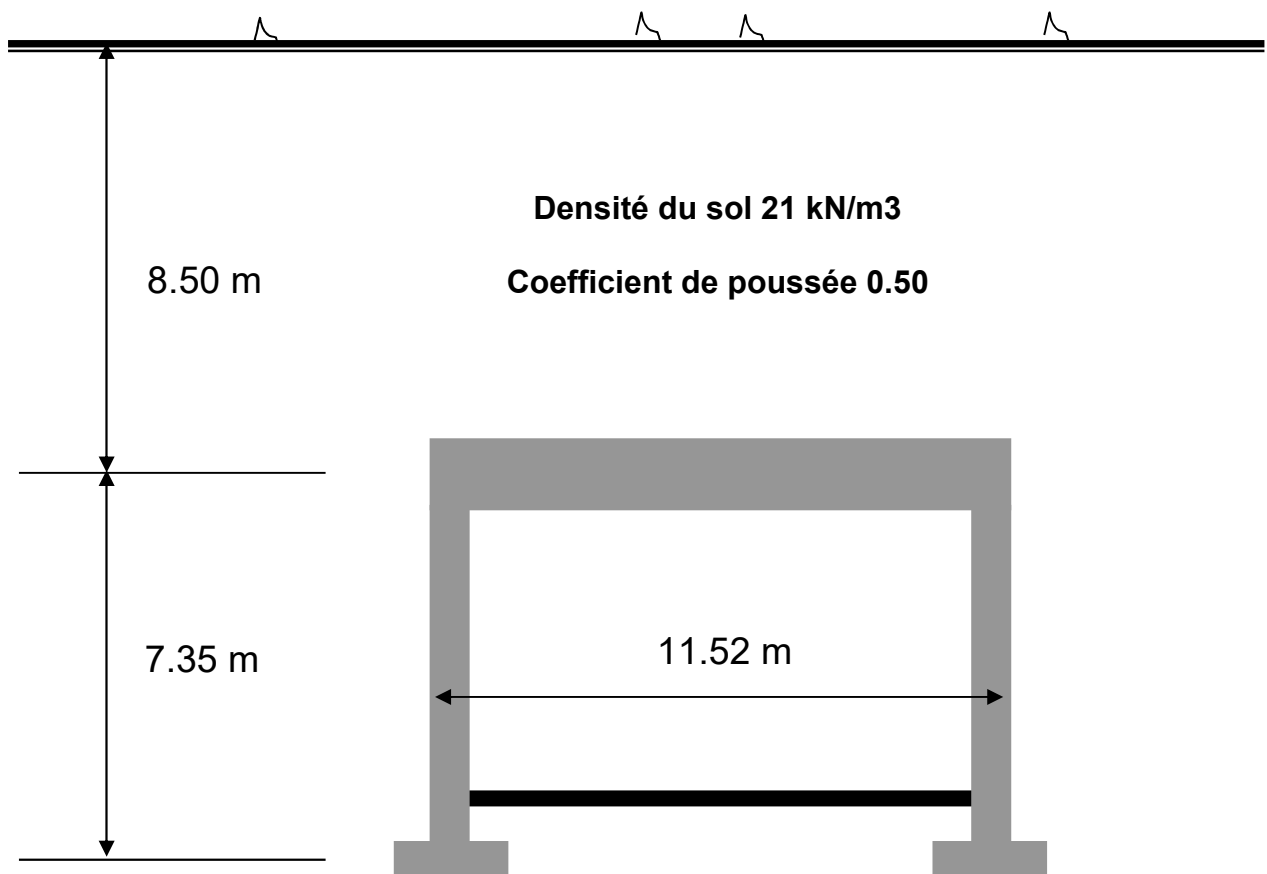
Quelle est la valeur de la force qui agit sur la vanne de fond dont le diamètre est 1.50 m ?



EXERCICE DE STATIQUE N° 3

Concepts, forces et charges

1 - Calculez et représentez schématiquement les charges de terre agissant sur les parois de la tranchée couverte ainsi que leur résultante pour une tranche de 1 m de profondeur. Calculez la charge verticale supportée par une fondation.

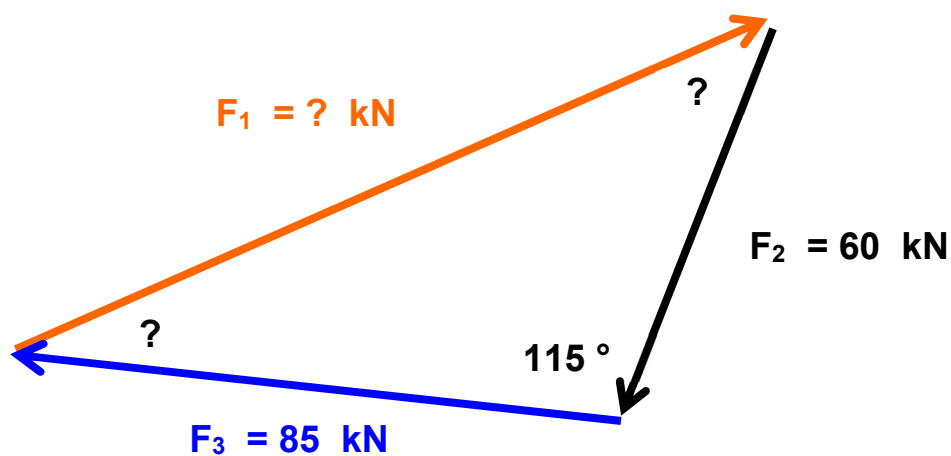




EXERCICE DE STATIQUE N° 4

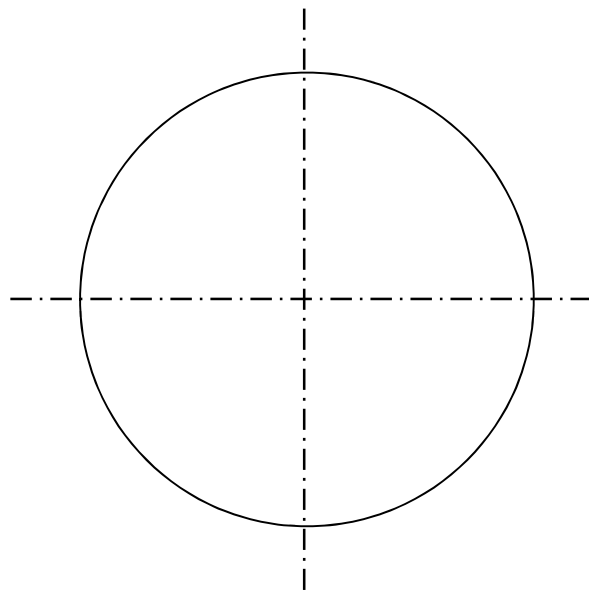
Rappels mathématiques + résultantes

1 - Par le théorème du sinus et du cosinus, calculez les inconnus du triangle ci-dessous ainsi que sa surface. Vérifiez graphiquement les valeurs obtenues analytiquement.



2 - Déterminez graphiquement et analytiquement avec la condition suivante : $F_1 = 2 * F_2$, le jeu de forces F_1 et F_2 inscrit dans le cercle ci-dessous et dont la résultante ($R = F_1 + F_2$) est égale au diamètre du cercle $\rightarrow 12 \text{ cm} = 120 \text{ kN}$. Quelles sont vos conclusions ?

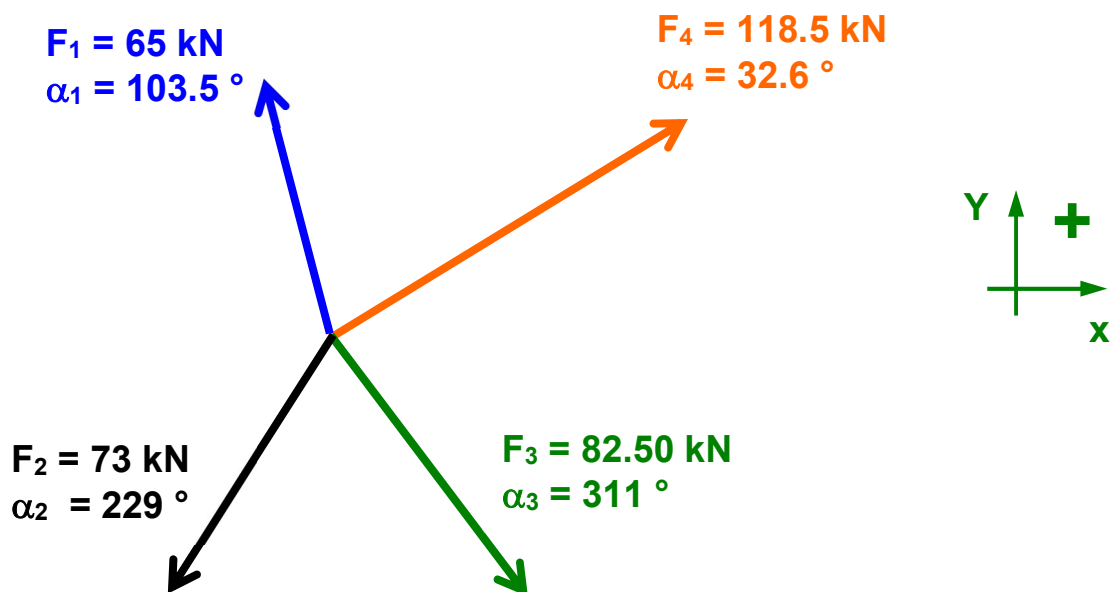
Rayon = 6 cm



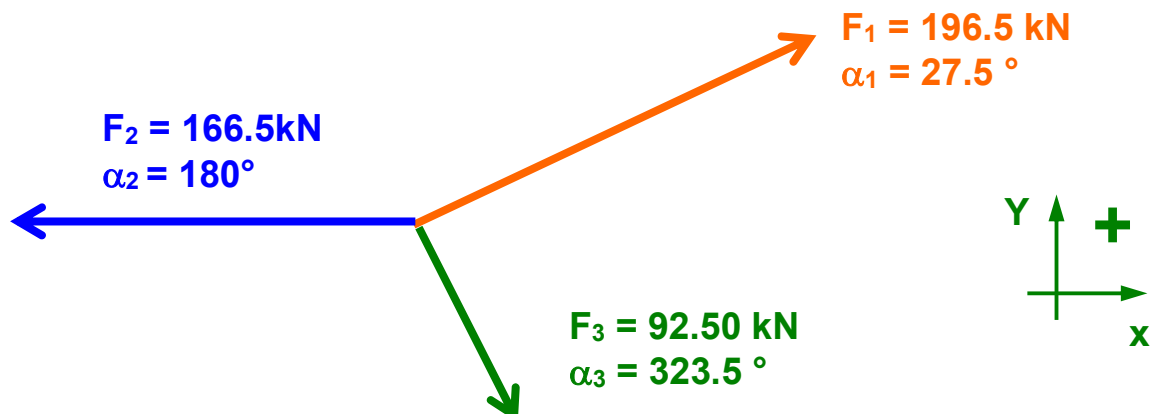
EXERCICE DE STATIQUE N° 5

Forces concourantes coplanaires

1 - Déterminez graphiquement et analytiquement la résultante du système de forces ci-dessous :



2 - Trouvez graphiquement et analytiquement la valeur et l'orientation de la 4ème force afin que la résultante du système ci-dessous soit nulle.



EXERCICE DE STATIQUE N° 6

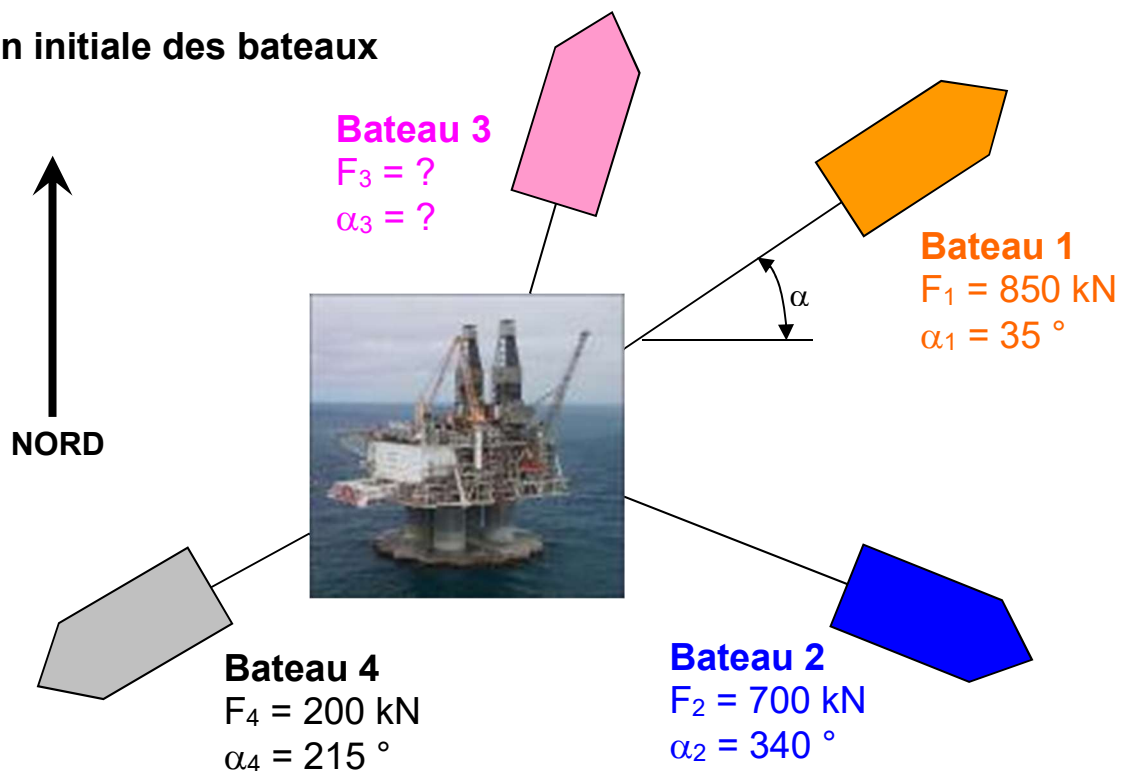
Equilibre d'un noeud

Un groupe de 4 bateaux remorqueurs est chargé de maintenir en position une plate-forme pétrolière d'un poids total de 35800 kN. Le courant de la mer à cet endroit est orienté vers le sud-ouest et il tend à faire dériver la plate-forme avec une force estimée à 1250 kN et les bateaux avec une force de 30 kN chacun.

1 - Quelle doit être la force dans le câble d'amarrage du bateau n° 3 et son orientation pour que la plate-forme ne dérive pas.

2 - Une fois l'équilibre établi, l'amarre du bateau n° 2 se casse. Donner aux autres bateaux une nouvelle combinaison de forces en conservant leur orientation afin que la plate-forme soit maintenue en place.

Situation initiale des bateaux



EXERCICE DE STATIQUE N° 7

Equilibre d'un nœud

1- Aidez Gaston Lagaffe à trouver la bonne corde pour son hamac. Sachant qu'une corde en matière synthétique résiste à 8.5 daN par mm^2 de fibre, quelle sera le diamètre de la corde assurant l'équilibre « extérieur » des arbres aux nœuds A et B qu'il devra acheter dans la configuration ci-dessous. Le coefficient de sécurité pour le choix de la corde sera admis à 1.50.

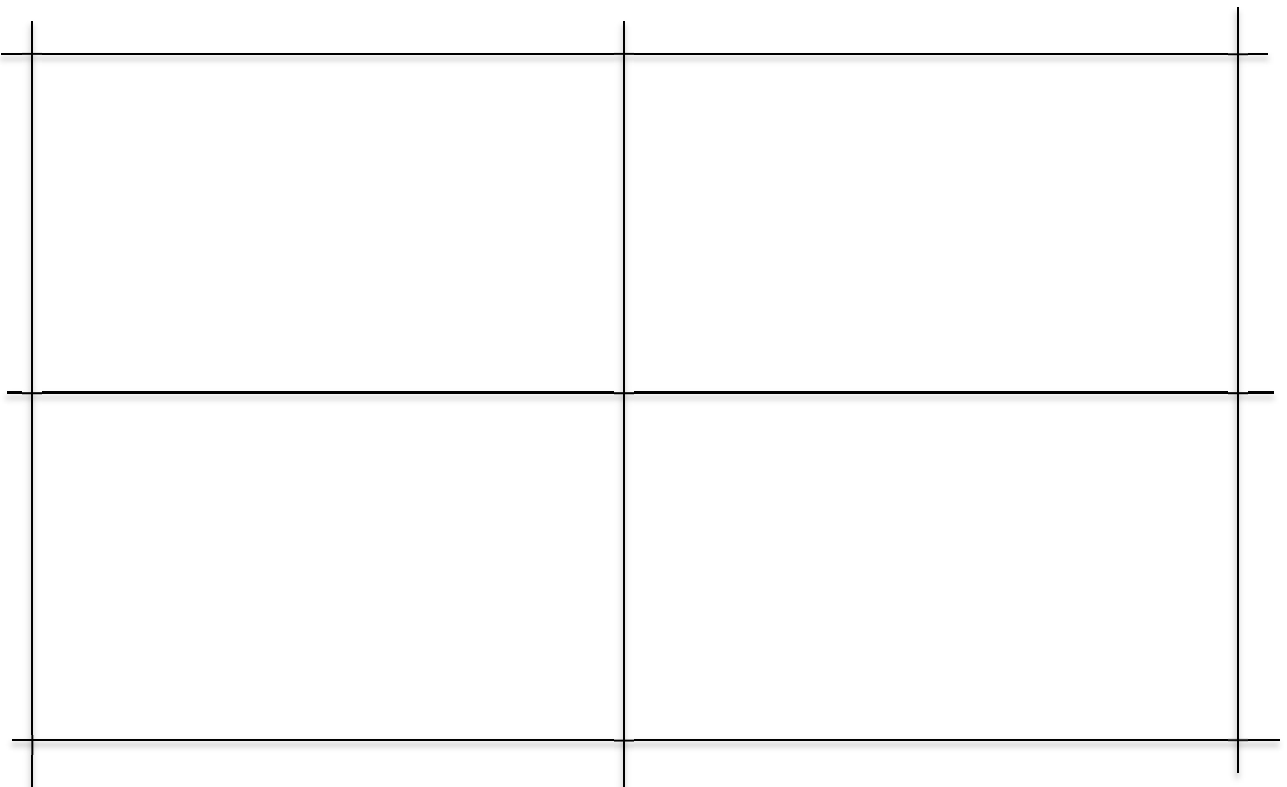
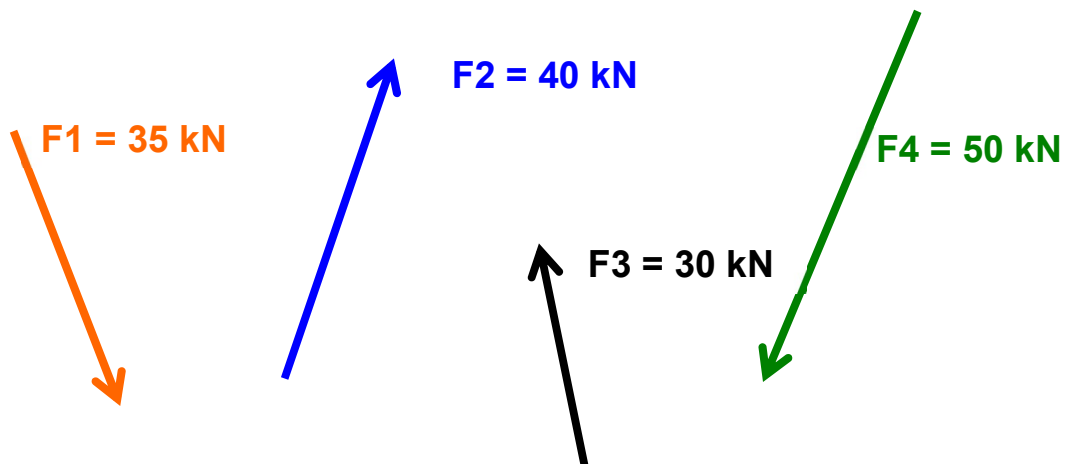




EXERCICE DE STATIQUE N° 8

Résultante d'un système de forces

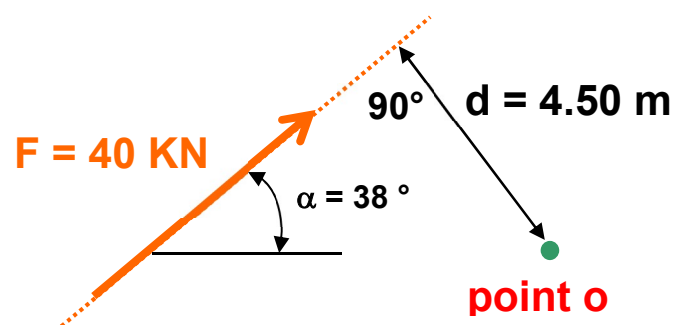
1 - Déterminez graphiquement sur la présente donnée, la position et la valeur de la résultante du système de forces ci-dessous.



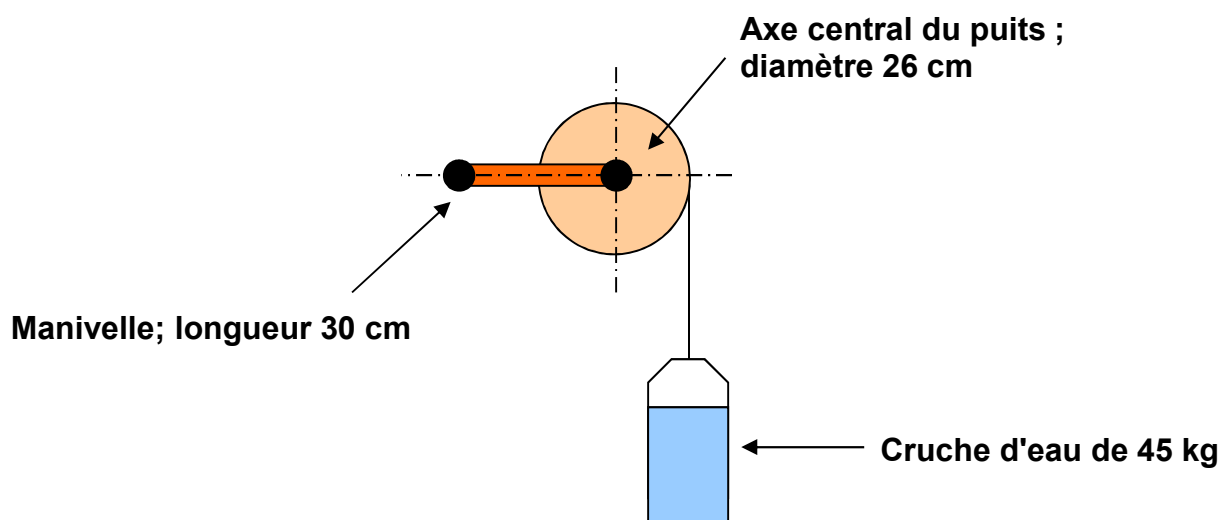
EXERCICE DE STATIQUE N° 9

Moments et couples

- 1 - Démontrez que le théorème de Varignon est vrai par rapport au point **O** pour le moment ci-dessous.



- 2 - Dans une oasis, un enfant essaie de remonter d'un puits une cruche pleine d'eau d'un poids de 45 kg. Hélas, cet enfant n'arrive qu'à développer une force de 12.5 kg sur la manivelle du puits. Aidez-le en lui proposant une astuce pour qu'il arrive de lui-même à remonter la cruche et vérifiez mathématiquement votre solution. Le mécanisme du puits est le suivant :

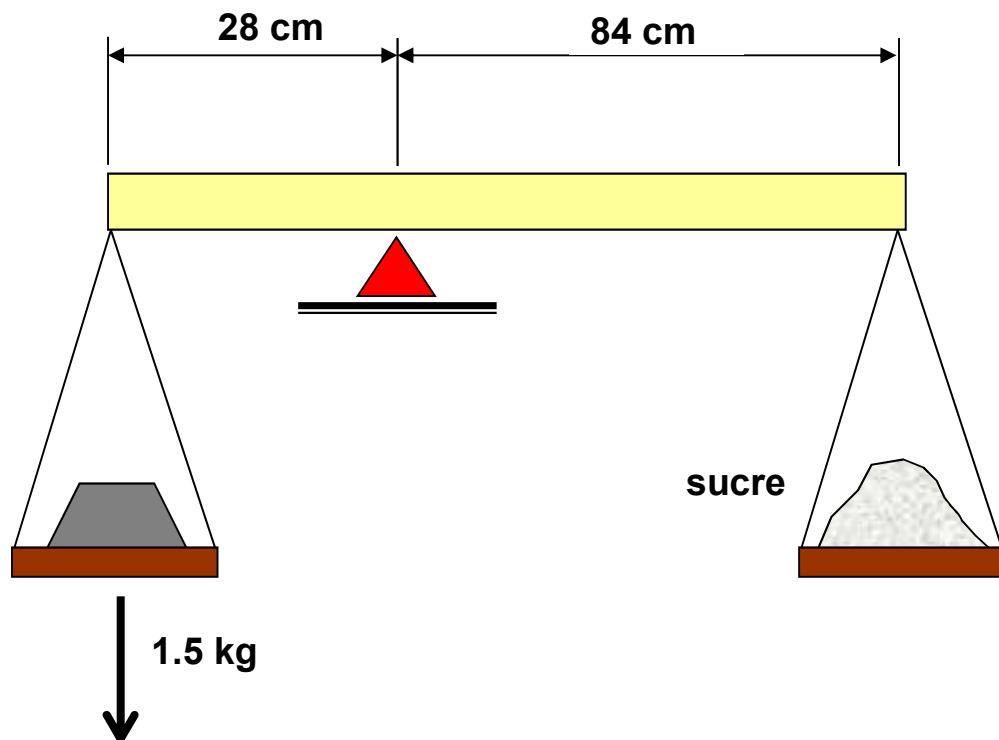


EXERCICE DE STATIQUE N° 10

Moments et couples

1 - Démontrez qu'un moment peut être déplacé dans l'espace sans modifier l'effet qu'il peut avoir sur un corps. Pour faire la démonstration, il faut décomposer le moment en un couple de forces.

2 - Un marchand utilise la balance romaine ci-dessous. Quelle doit être la quantité de sucre que l'on doit mettre sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre ? Lorsque la balance est en équilibre, où est située la résultante des masses agissant sur les plateaux de gauche et de droite ?

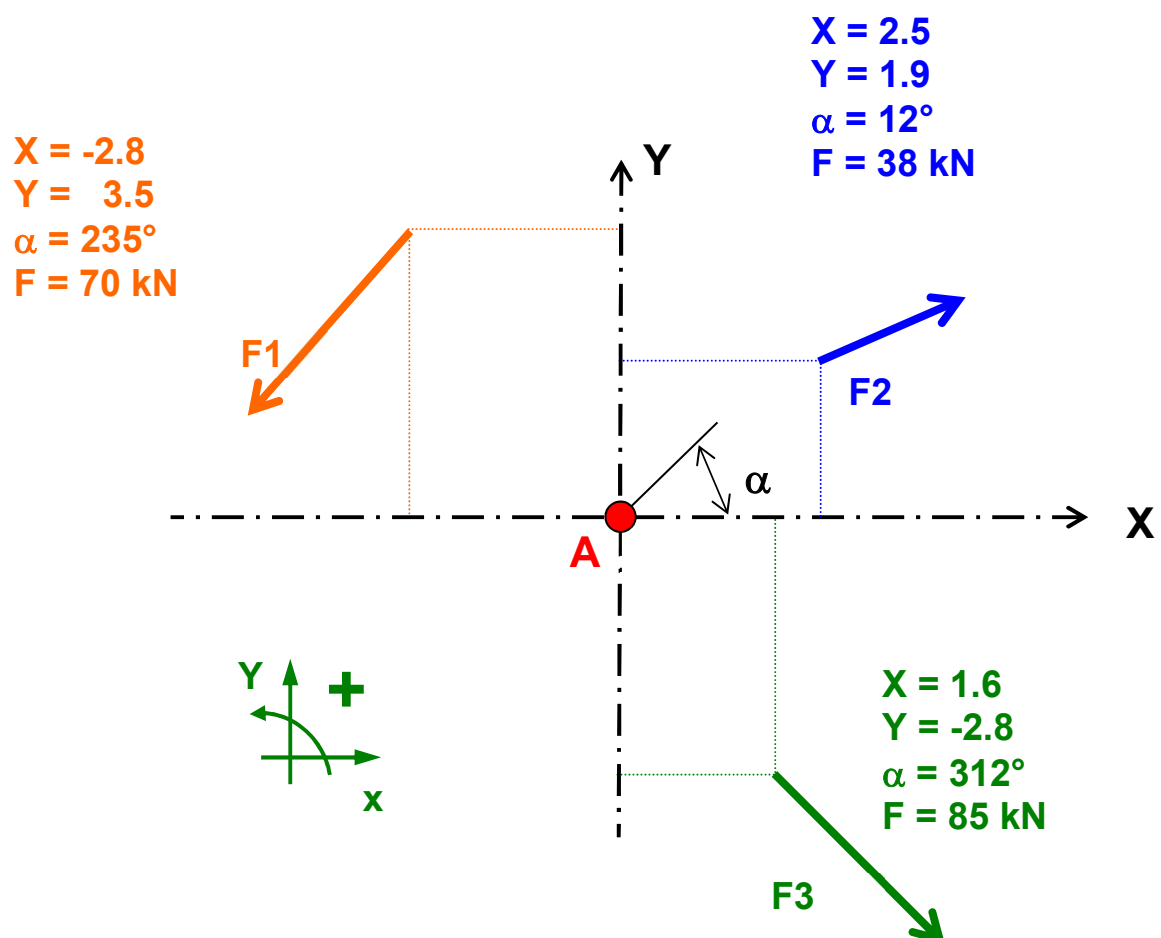




EXERCICE DE STATIQUE N° 11

Réduction de forces

1 - Déterminez graphiquement et analytiquement la position et la valeur de la résultante par rapport au point A du groupe de forces ci-dessous.

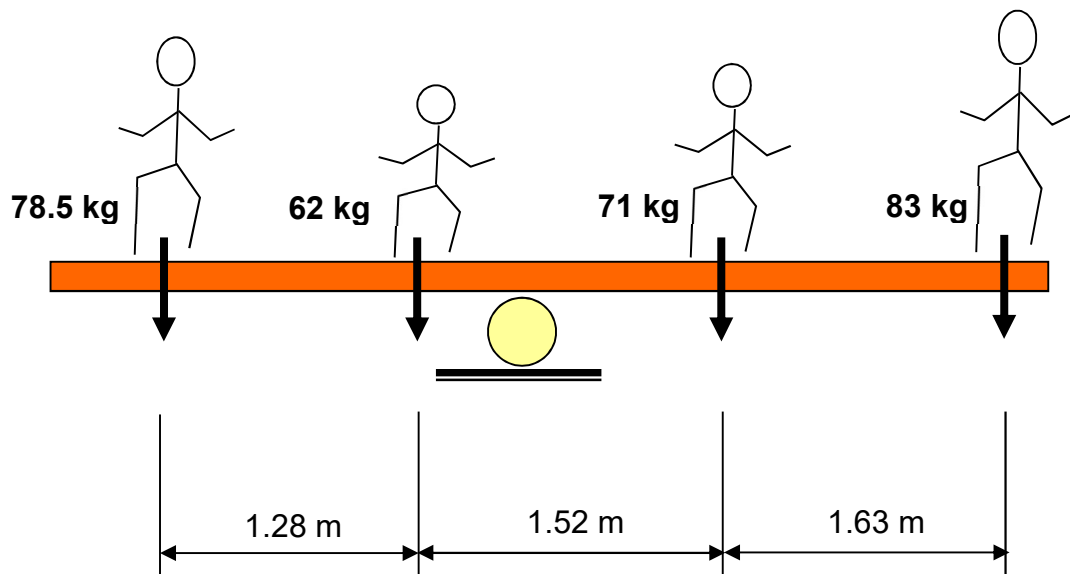


EXERCICE DE STATIQUE N° 12

Réduction de forces

1a - 4 artistes de cirque désirent être en équilibre sur une planche en bois. La planche est posée sur un rouleau. Quelle doit être la position exacte du rouleau pour que le groupe d'équilibristes soit en équilibre ?

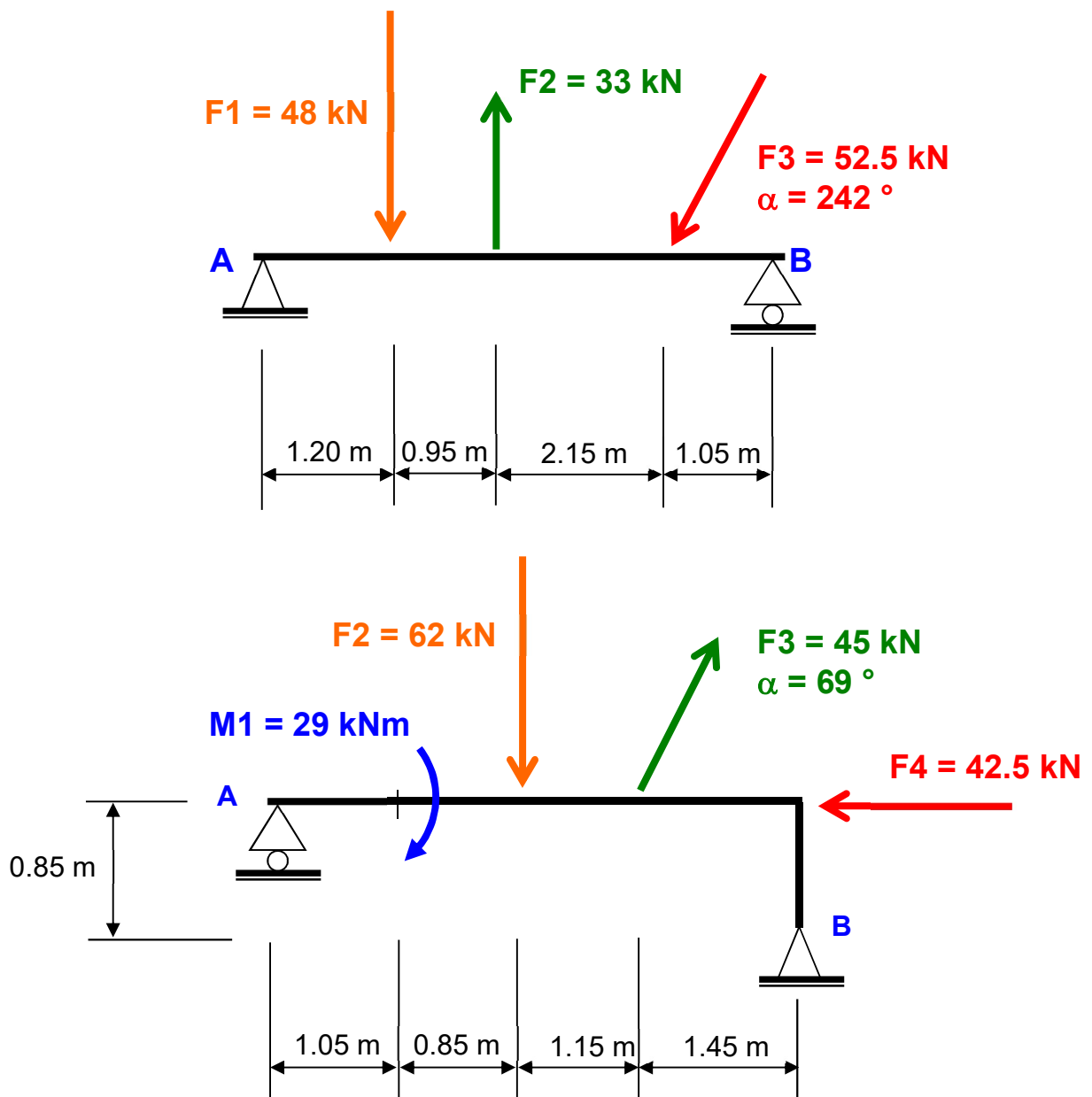
2a - Déterminez graphiquement la valeur et la position de la résultante du groupe d'équilibristes et dessinez la position du rouleau obtenu au point 1a ; que constatez-vous ?



EXERCICE DE STATIQUE N° 13

Réactions d'appuis

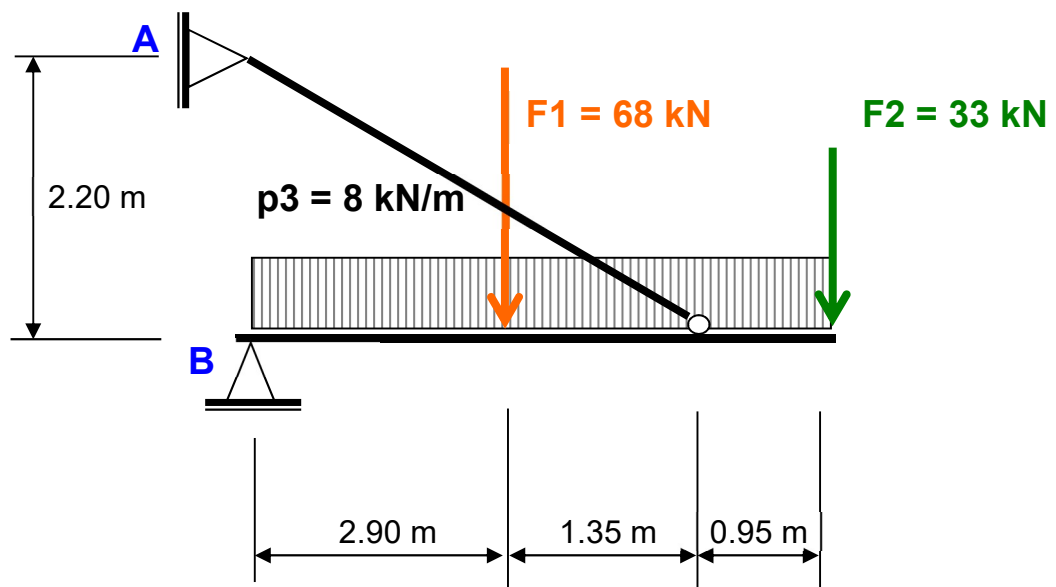
1 - Déterminez analytiquement et graphiquement les réactions d'appuis des systèmes suivants :



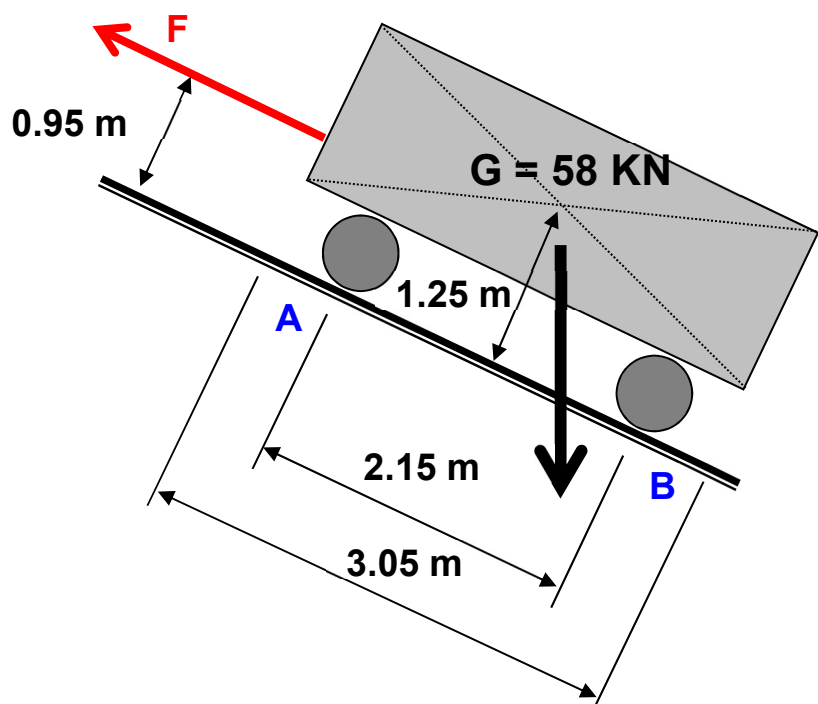
EXERCICE DE STATIQUE N° 14

Réactions d'appuis + équilibre de systèmes

1 - Calculez les réactions d'appuis du système suivant :



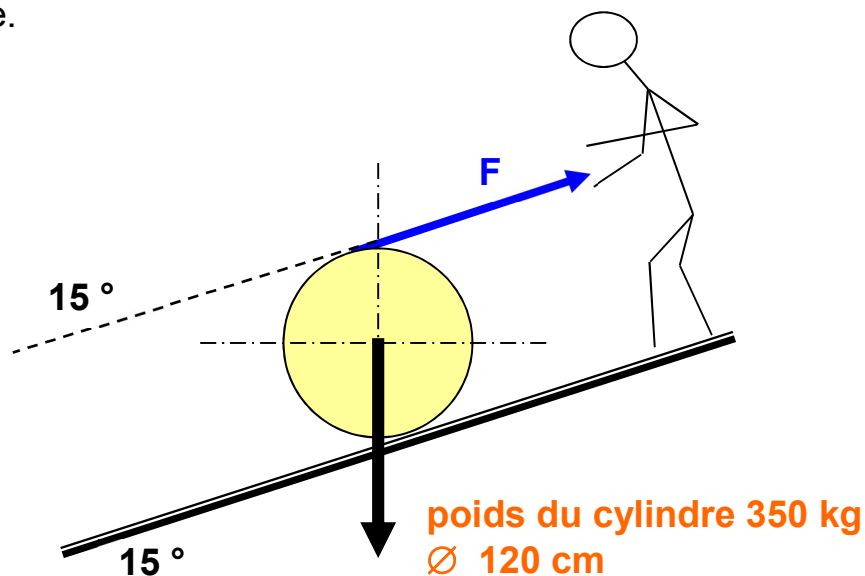
2 - Déterminez les réactions d'appuis des roues du chariot et la force de traction F du câble de retenue. L'inclinaison du plan de roulement est de 33 degrés.



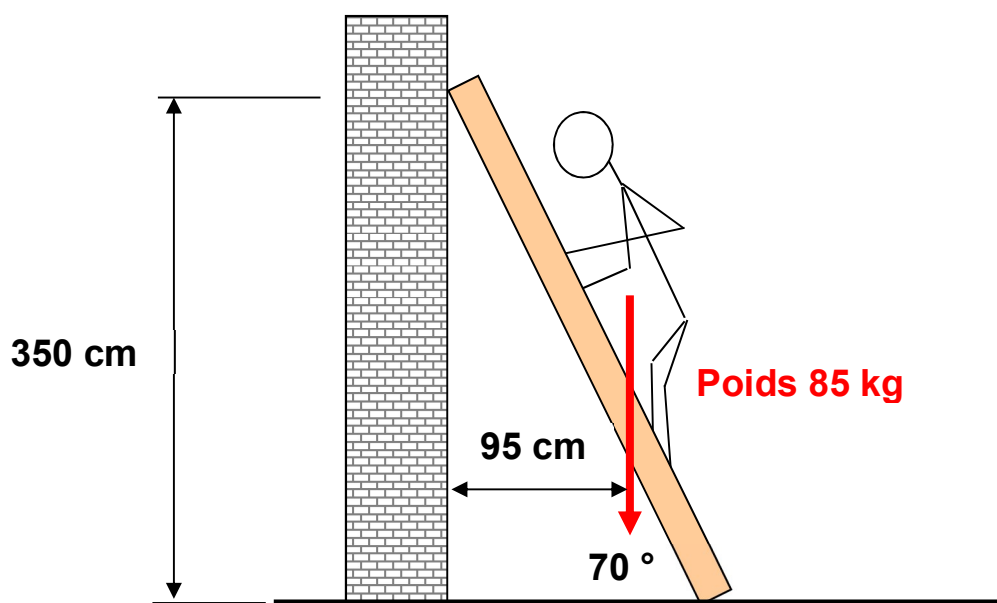
EXERCICE DE STATIQUE N° 15

Réactions d'appuis + équilibre de systèmes

1 - Déterminez les réactions d'appuis du cylindre sur le sol et la force dans la corde.



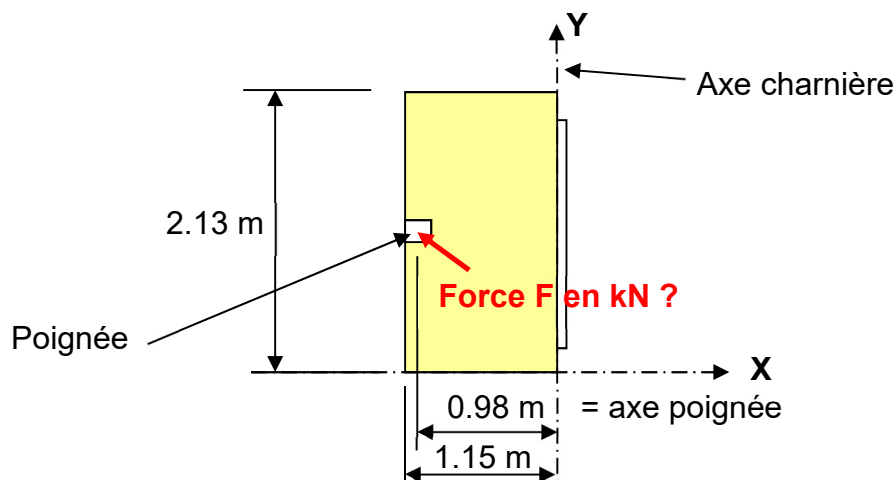
2 - Déterminez les réactions d'appuis de l'échelle sur le sol et contre le mur.



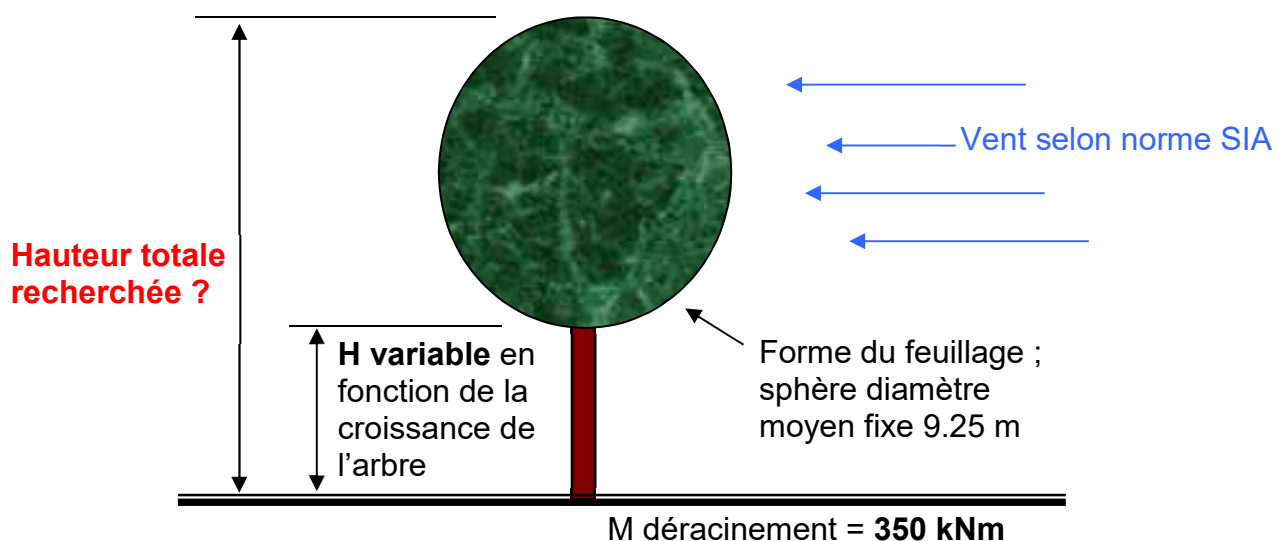
EXERCICE DE STATIQUE N° 16

Réactions d'appuis + équilibre de systèmes

1 - Calculez la force **F** en **kN** à appliquer sur la poignée d'une porte qu'il faudra à une personne pour l'ouvrir sachant qu'il y a une surpression à l'intérieur d'un local de **0,0046 bar**. (1 bar = 1 kg/cm²)



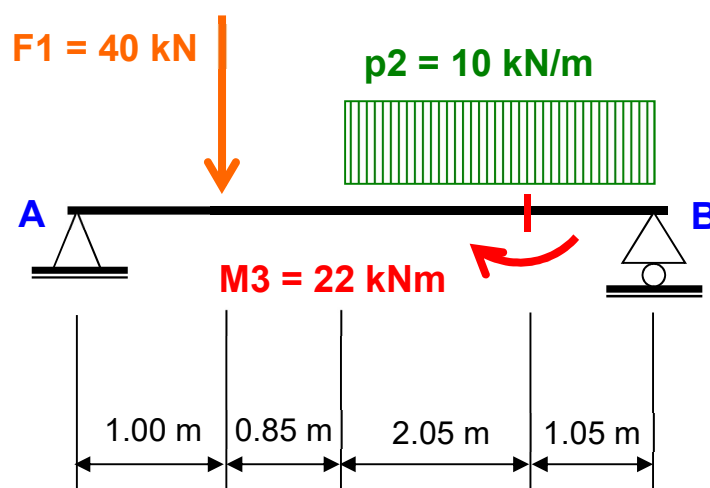
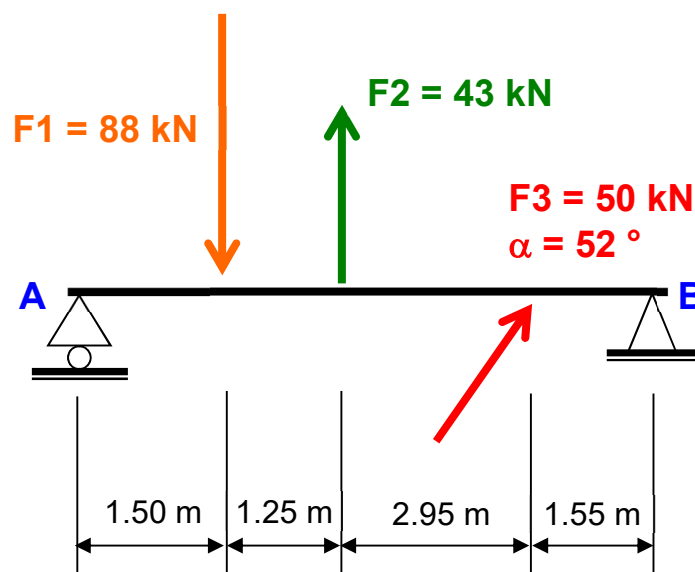
2 - Un garde forestier estime que le moment de déracinement d'un tilleul à la base du tronc est de l'ordre de **350 kNm**. A partir de quelle hauteur totale de l'arbre, y a-t-il risque de déracinement lors d'un petit ouragan de type Lothar ? Hypothèses de calcul de la force du vent (SIA) : situation de l'arbre **Payerne**, **C_{pe} = 0.58**, **C_h = 1.15**



EXERCICE DE STATIQUE N° 17

Efforts intérieurs

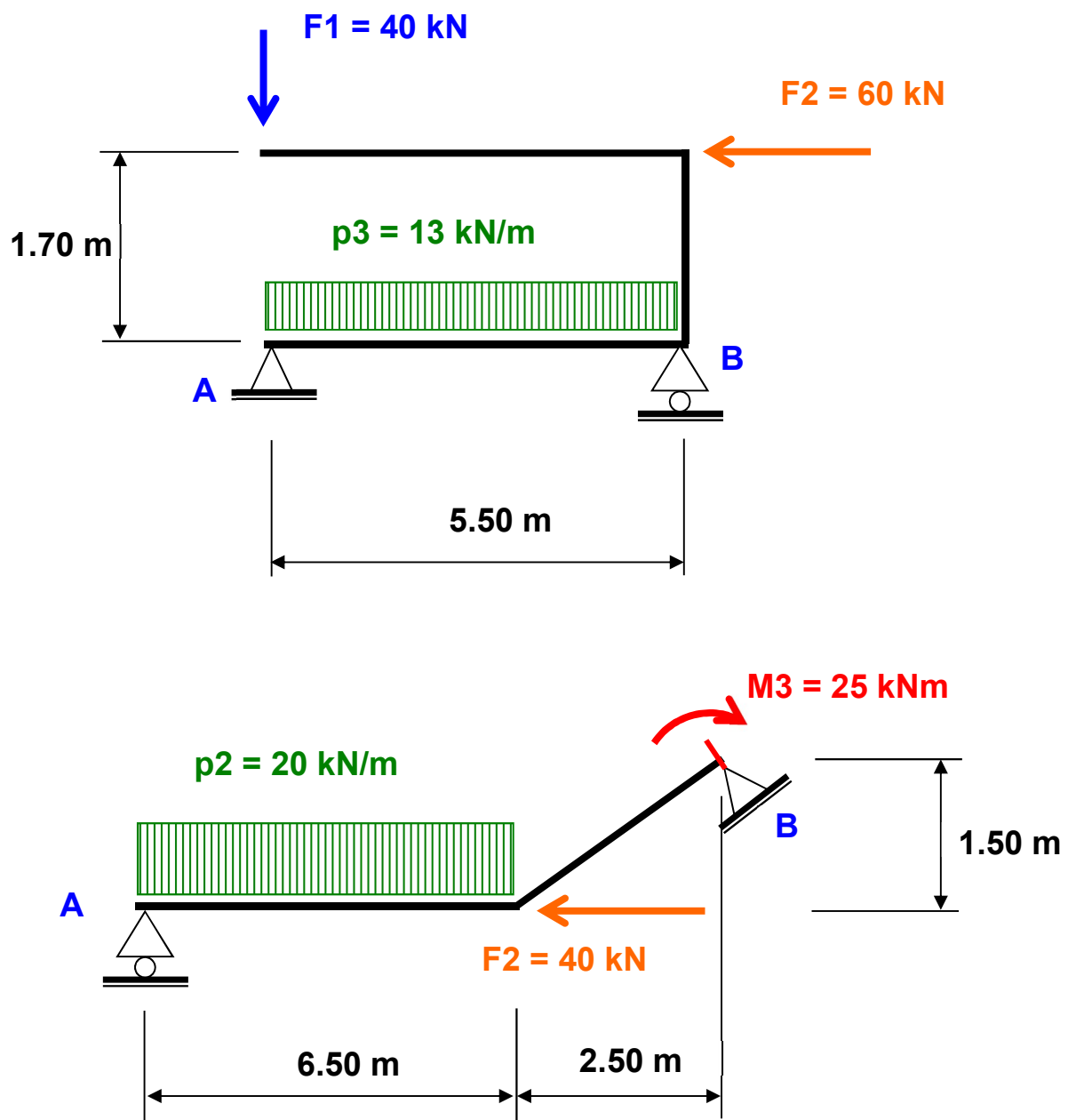
1 - Déterminez les réactions d'appuis et les efforts intérieurs des systèmes suivants avec leurs valeurs maximales :



EXERCICE DE STATIQUE N° 18

Efforts intérieurs

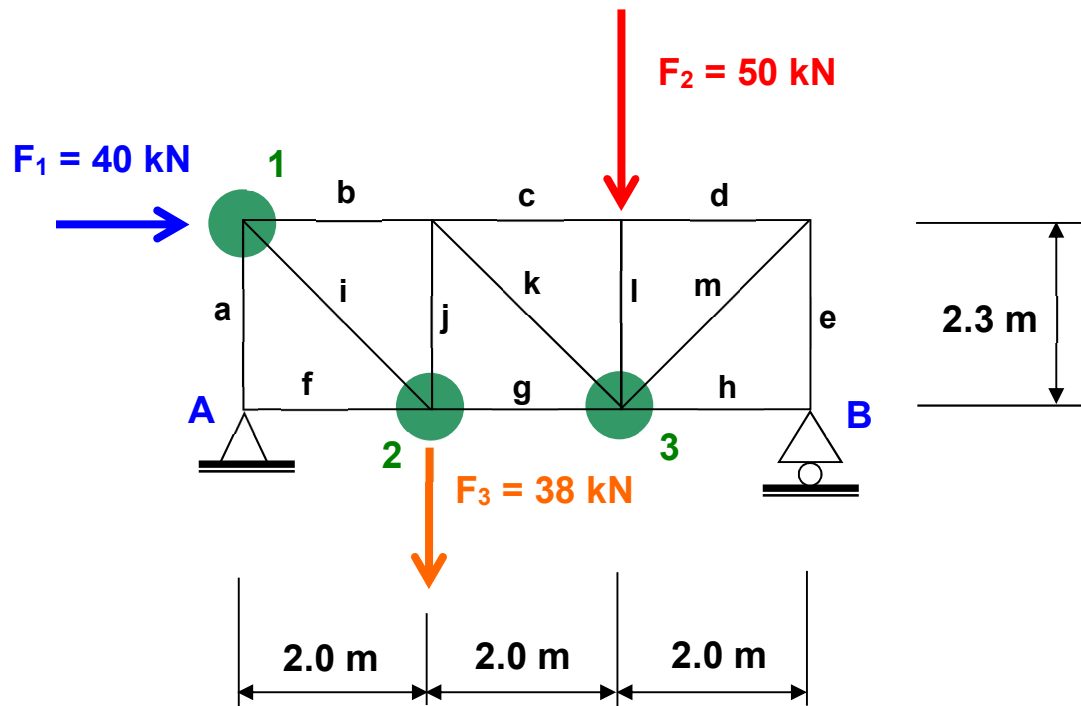
1 – Déterminez les réactions d'appuis et les efforts intérieurs des systèmes suivants avec leurs valeurs maximales :



EXERCICE DE STATIQUE N° 19

Poutres à treillis

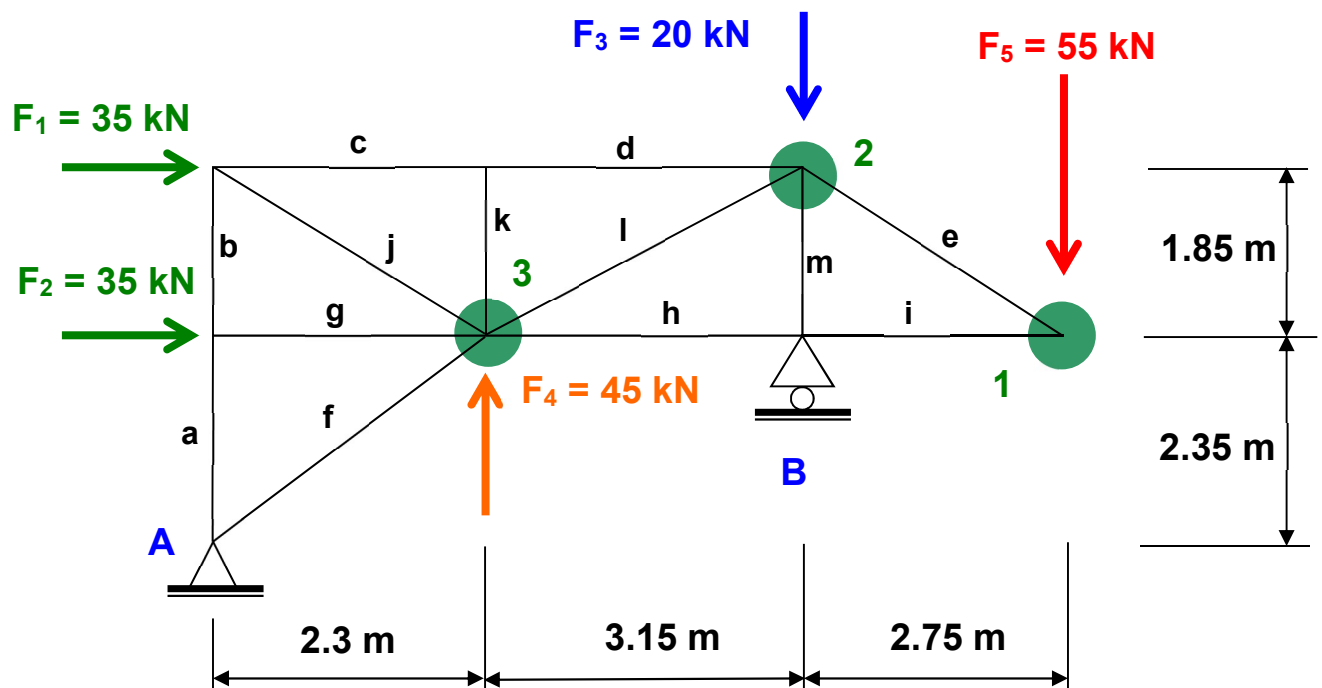
1 - Déterminez les réactions d'appuis et les efforts dans les barres du système triangulé ci-dessous au moyen de la méthode graphique. Contrôlez analytiquement l'équilibre des nœuds marqués d'un rond vert.



EXERCICE DE STATIQUE N° 20

Poutres à treillis

1 - Déterminez les réactions d'appuis et les efforts dans les barres du système triangulé ci-dessous au moyen de la méthode graphique. Contrôlez analytiquement l'équilibre des nœuds marqués d'un rond vert.

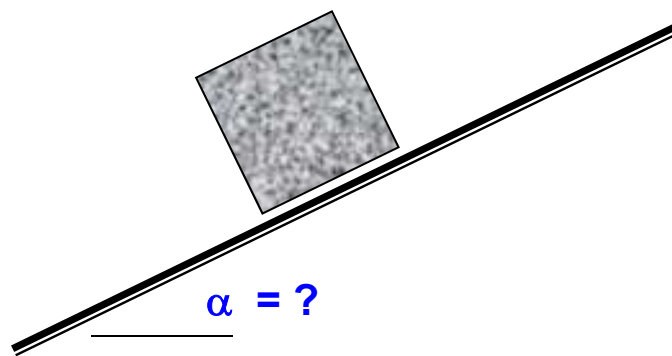


EXERCICE DE STATIQUE N° 21

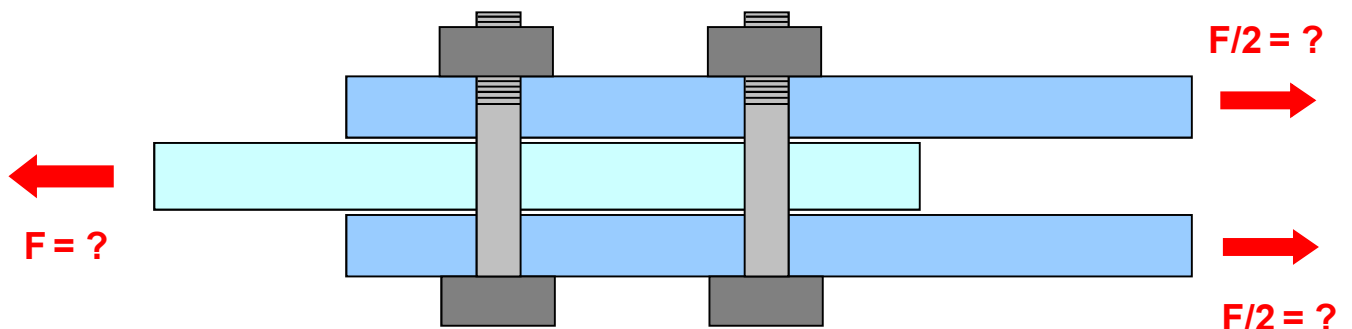
Frottement sec

1 a - Déterminez l'angle du talus en terre pour lequel un cube en granit de 2 m de côté commence à glisser. Hypothèses : $\mu = 0.6$, granit 27 kN/m³.

1 b - Quelle doit être la valeur du coefficient μ et l'angle du talus pour que le cube commence à rouler.



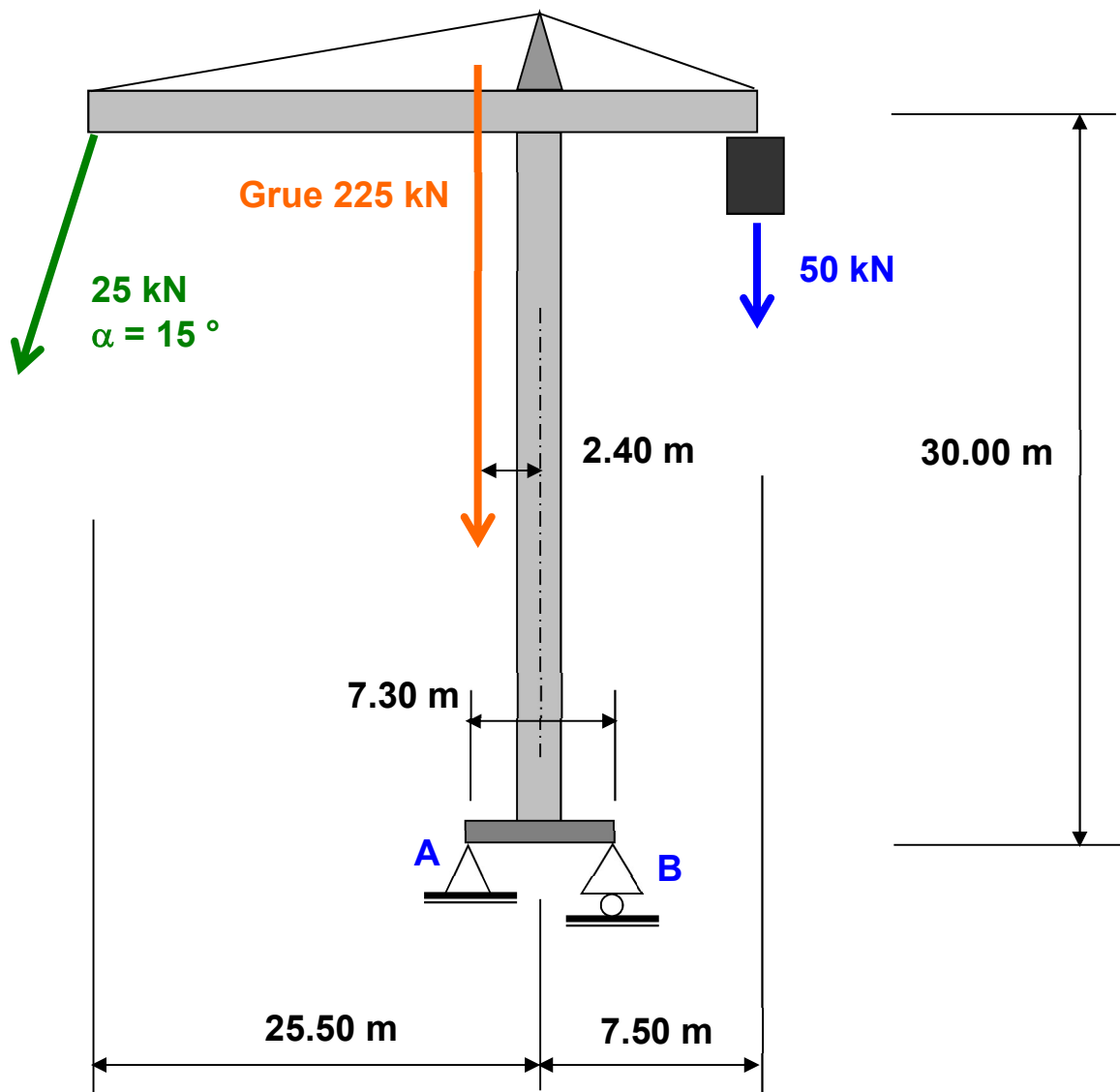
2 - Un assemblage de construction métallique est composé de 2 boulons. Les trous sont percés 2 mm plus grand que le diamètre de la tige du boulon. Quel sera l'effort nécessaire F pour que les fers plats glissent les uns par rapport aux autres si un boulon exerce une pression de serrage de 185 kN.



EXERCICE DE STATIQUE N° 22

Equilibre statique global

1 - Déterminez la sécurité au renversement de la grue ci-dessous lorsqu'elle soulève une charge par fort vent. Déterminez graphiquement les réactions d'appuis et la position de la résultante. Est-ce que la grue se renverse ; justifiez votre réponse.

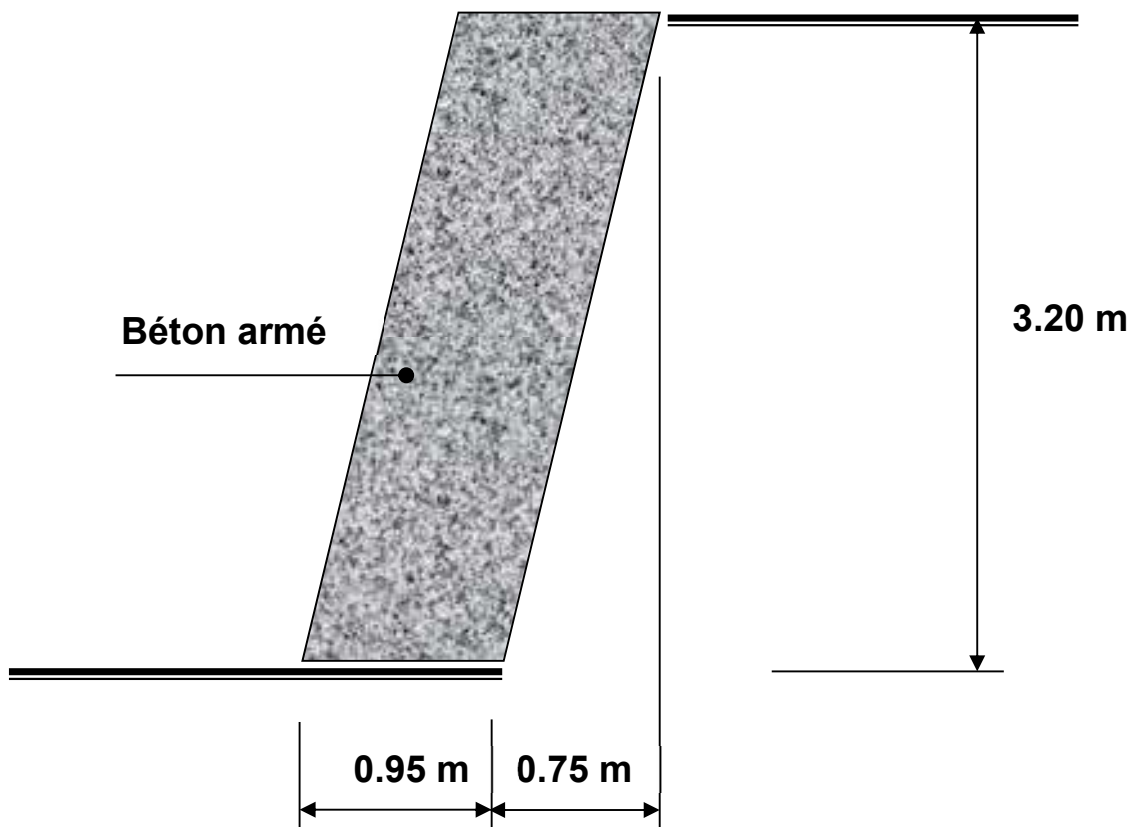


EXERCICE DE STATIQUE N° 23

Equilibre statique global

1 - Déterminez la sécurité au renversement et au glissement du mur de soutènement type "poids" ci-dessous.

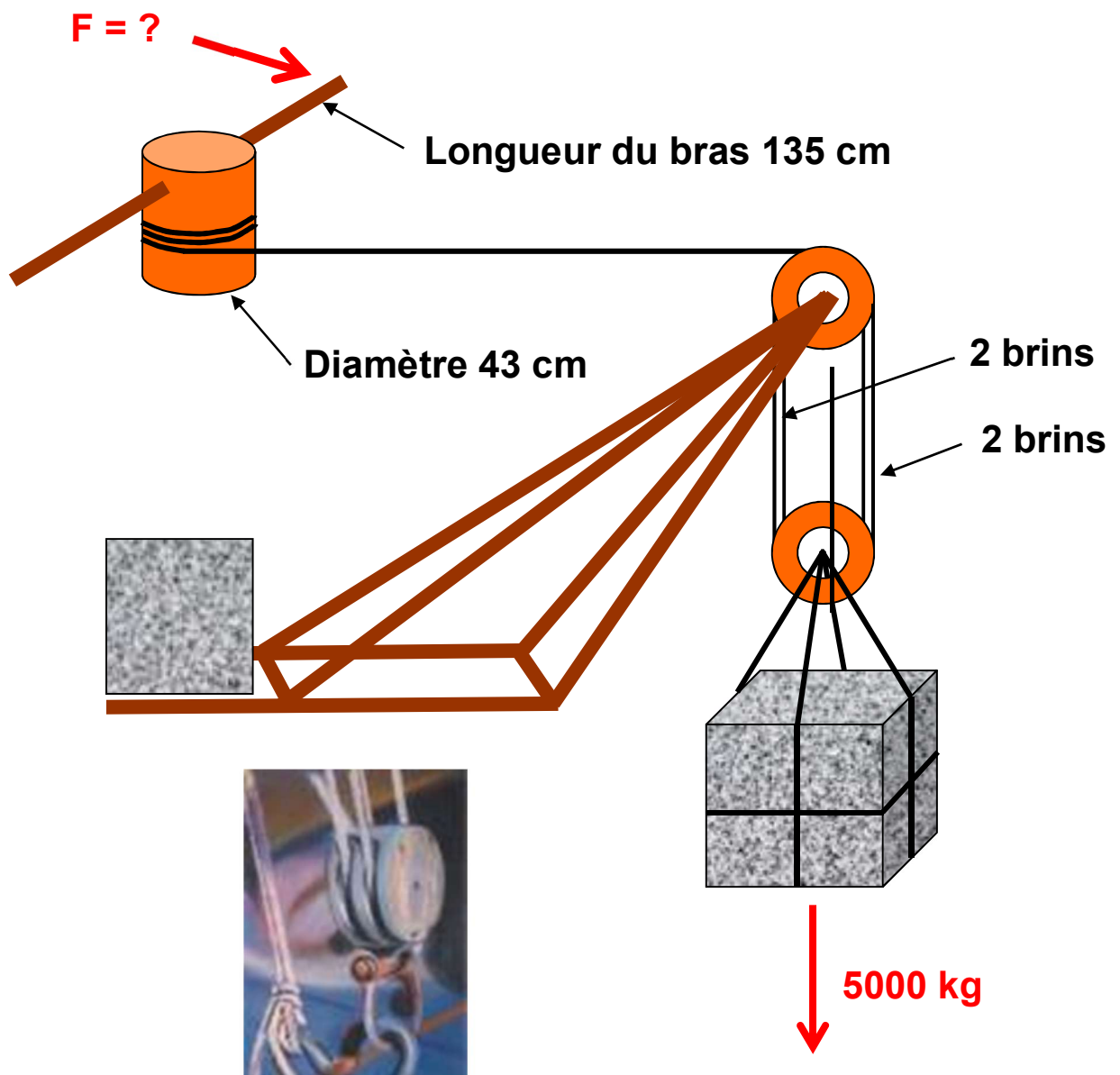
Hypothèses : terrain 20 kN/m³
 $\phi = 29^\circ$
pas d'eau.



EXERCICE DE STATIQUE N° 24

Exercice pratique de statique

1 – Au moyen âge, quel effort fallait-il dans le cabestan pour lever un bloc de pierre de 5 tonnes au moyen du système ci-dessous ? Quelle devait être la force d'amarrage du cabestan dans le sol ?





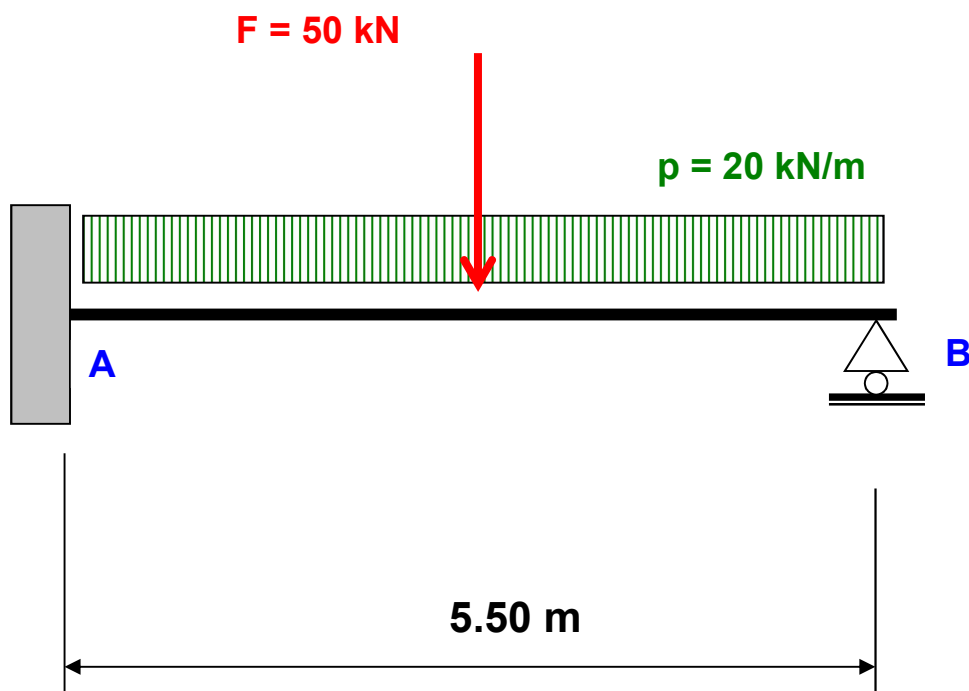
EXERCICE DE STATIQUE N° 25

Application au moyen du formulaire de statique

1 - Déterminez les réactions d'appuis, les efforts intérieurs avec leurs valeurs maximales ainsi que la déformation du système ci-dessous au moyen du formulaire de statique.

E = module d'élasticité = 210'000 N/mm² (acier)

I = inertie de la poutre = 150 E6 mm⁴





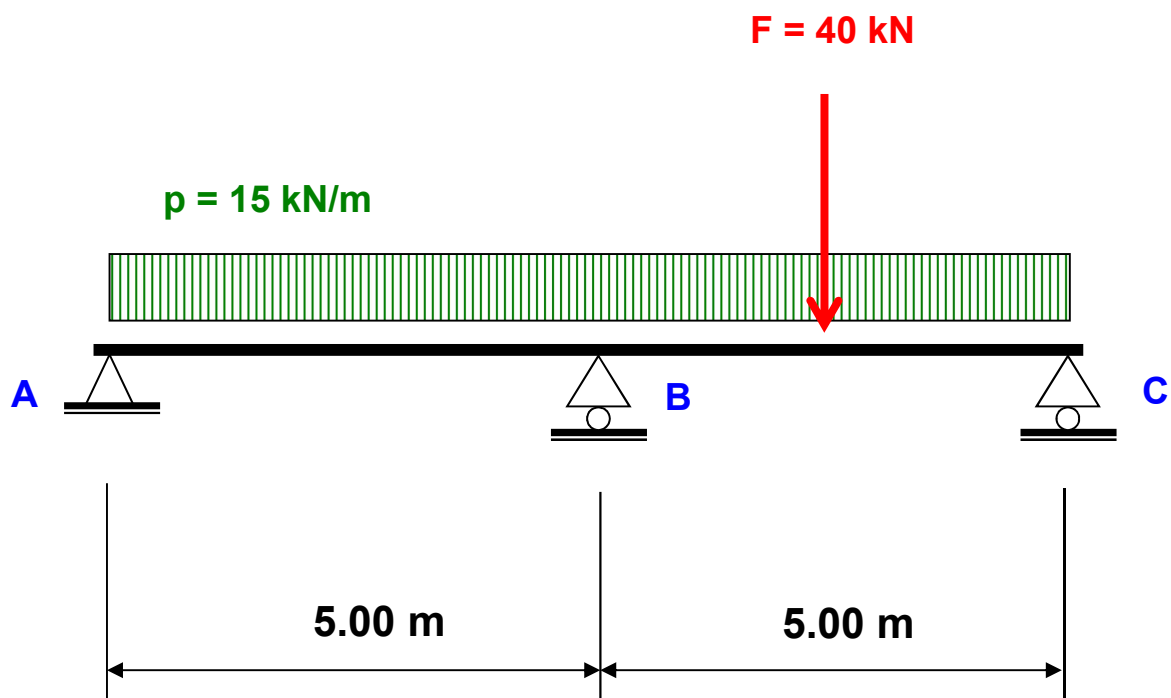
EXERCICE DE STATIQUE N° 26

Application au moyen du formulaire de statique

1 - Déterminez les réactions d'appuis, les efforts intérieurs avec leurs valeurs maximales ainsi que la déformation du système ci-dessous au moyen du formulaire de statique.

E = module d'élasticité = 10'000 N/mm² (bois)

I = inertie de la poutre = 85 E6 mm⁴



12. ANNEXES

Extraits de la norme SIA 261 et formulaires de statique



SIA

SIA 261:2003 Bâtiment, génie civil

EINGETRAGENE NORM DER SCHWEIZERISCHEN NORMEN-VEREINIGUNG SNV NORME ENREGISTRÉE DE L'ASSOCIATION SUISSE DE NORMALISATION

Einwirkungen auf Tragwerke
Azioni sulle strutture portanti
Actions on Structures

Actions sur les structures porteuses

Éditeur
Société suisse des ingénieurs et des architectes
Case postale, CH-8039 Zurich

Schweizer Norm
Norme suisse
Norma svizzera



505 261

Remplace avec la norme SIA 261/1, le chiffre 4 de la norme SIA 160, Édition de 1989



ANNEXE A CHARGES VOLUMIQUES, CHARGES DE SURFACE ET ANGLES DE TALUS NATURELS

Tableau 30: Charges volumiques moyennes des matériaux

Matériau	Charge volumique [kN/m ³]	Matériau	Charge volumique [kN/m ³]
Aluminium	27	Maçonnerie montée sans crépi	
Acier	78,5	briques de terre cuite pleines	18
Béton		briques de terre cuite perforées	13
non armé	24	briques à haute isolation phonique	17
armé	25	briques apparentes perforées	15
Béton léger (à déterminer de cas en cas)		agglomérés de béton pleins	22
Bois		agglomérés de béton perforés	18
résineux en général	5	agglomérés isolants phoniquement	20
feuillus en général	7,5	briques silico-calcaire pleines	20
bois résineux collés	5	briques silico-calcaires perforées	18
panneaux en bois aggloméré	8	agglomérés de béton cellulaire, qualité normale	6
Maçonnerie en pierre		agglomérés de béton cellulaire, haute qualité	7
moellons (calcaire)	24	briques de verre pleines	25
granit	27	briques de verre creuses	14
basalte	30	plaques d'argile cellulaire	12
molasse, grès	24	plaques de plâtre	12
Enduits et crépis		Revêtements de sols	
mortier de chaux	19	dallage en céramique	20
mortier de ciment	22	pierre naturelle	30
mortier de plâtre	12	parquet en bois collé	8
crépis muraux extérieurs	18	linoléum	15
crépis muraux intérieurs	14	Revêtements bitumineux	
		asphalte coulé	24
		revêtement bitumineux (HMT)	24

Tableau 31: Charges moyennes des couvertures et des revêtements par unité de surface

Couverture, revêtement	Charge de surface [kN/m ²]	Couverture, revêtement	Charge de surface [kN/m ²]
Ciment armé de fibres	0,18	Sous-toitures	
Tôles profilées, hauteur 80 mm, épaisseur 0,8 mm		bardeaux	0,10
en acier	0,12	panneaux de fibres durs	0,05
en aluminium	0,04	panneaux en ciment armé de fibres	0,12
Couverture d'ardoise en ciment armé de fibres		lambris 24 mm, y compris une couche de carton bituminé ou une feuille plastique	0,14
recouvrement simple	0,23	Vitrage, y compris châssis	
recouvrement double	0,30	verre normal 5 mm	0,25
Tuiles en terre cuite, y compris lattis		verre armé 6 mm	0,35
tuiles plates, recouvrement double	0,75	Gravillon, par 10 mm d'épaisseur	0,20
tuiles flamandes	0,47	Carton bitumé, par couche	0,02
Tuiles en béton, y compris lattis		Feuille plastique	0,02
tuiles plates	0,55	Enduits de mortier	0,02
tuiles flamandes	0,48		

Tableau 32: Charges volumiques et angles de talus naturels des terres, du ballast, des matériaux et denrées stockés

Matériau / denrée	Charge volumique [kN/m ³]	Angle de talus naturel [°]	Matériau / denrée	Charge volumique [kN/m ³]	Angle de talus naturel [°]
Terres et ballast			Liquides		
sable	15	35	benzine	7,3	
tout venant, mélangé	20	27	pétrole, diesel et mazout	8,5	
ballast, concassé	18	35	goudron de houille, bitume	12	
terre, sèche	16	40...45	huile minérale de graissage	9,2	
terre, humide	21	20...25	huile végétale	9,5	
décombres, gravats (en moyenne)	14	30...35	Papier		
Combustibles			livres sur étagères	6	
houille	9	35	papier empilé	11	
briquettes, en vrac	9	30	papier en rouleaux	15	
briquettes, empilées	13,5		Fourrage		
coke, en vrac	5		céréales en vrac	7,5	30
bois en bûches:			pommes de terre, betteraves fourragères	7	30
conifère, sec	4,4	45	foin et paille en vrac	1,5	
conifère, humide	6,5	45	herbe en vrac	3,5	
feuillu, sec	7	45	Fumier	9,5	
feuillu, humide	10	45	Denrées alimentaires		
bois en copeaux, en vrac	1,5	25	farine en vrac	6	35
bois en copeaux, compacté	2,5	45	sucre en vrac	9,5	35
Liants			sel en vrac	12	40
chaux hydraulique	12	25	sel en sacs	10	
ciment en silo	16	30			
ciment en sacs	12				
clinker de ciment, en vrac	17	30			

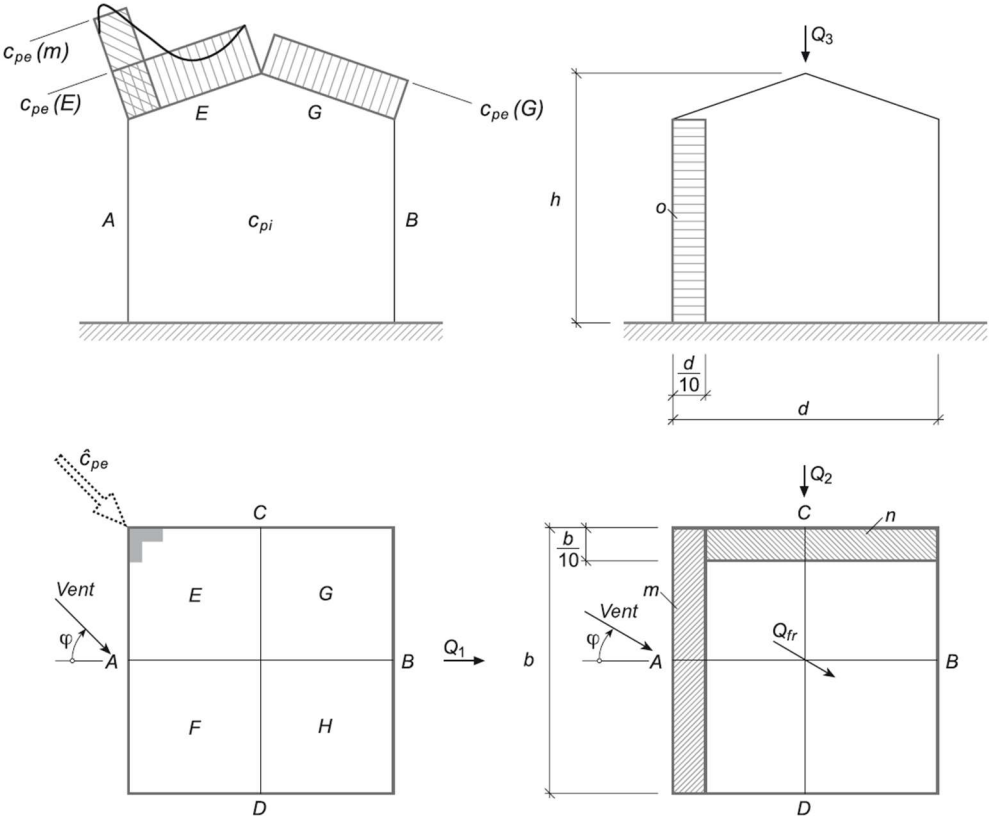
CHARGES DANS LES BATIMENTS

Tableau 8: Catégories des surfaces utiles et valeurs caractéristiques des charges utiles

Catégorie	Genre de surface utile	Exemple	q_k [kN/m ²]	Q_k [kN]
A	Surfaces d'habitation	A1: Locaux dans les immeubles, les maisons d'habitation, les services des hôpitaux, les chambres d'hôtel, les cuisines et les toilettes	2	2 ¹⁾
		A2: Balcons	3	2 ¹⁾
		A3: Escaliers	4	2 ¹⁾
B	Bureaux		3	2 ¹⁾
C	Locaux de réunion	C1: Surfaces avec tables et chaises	3	4 ¹⁾
		C2: Surfaces avec sièges fixes	4	4 ¹⁾
		C3: Surfaces librement accessibles, surfaces de sport et de jeu, surface permettant des rassemblements de personnes	5	4 ¹⁾
D	Surfaces de vente	Grands magasins, commerces	5	4 ¹⁾
E	Surfaces d'entreposage et de fabrication	Entrepôts, bibliothèques et leurs accès, halles de fabrication	2) 3)	2) 3)
F	Surfaces de stationnement et surfaces accessibles aux véhicules de poids inférieur à 3,5 t	Parkings à étages, surfaces de parc, garages	2 ³⁾	20 ^{3) 4)}
G	Surfaces de stationnement et surfaces accessibles aux véhicules de 3,5 à 16 t	Rampes d'accès, zones de livraison, zones accessibles aux véhicules du service du feu	5 ³⁾	90 ^{3) 4)}
H	Toitures non accessibles ⁵⁾	Toits uniquement accessibles pour des travaux d'entretien	0,4	1 ¹⁾
¹⁾ Surface d'application 50 mm x 50 mm; Q_k ne doit pas être combiné avec q_k . Pour les surfaces d'entrepôts équipées d'étagères ou les surfaces accessibles aux engins de levage, on fixera la valeur Q_k en tenant compte des spécificités du projet. ²⁾ Voir chiffre 8.2.2. ³⁾ On admettra que Q_k et q_k agissent simultanément. ⁴⁾ Deux charges concentrées $Q_k/2$ distantes de 1,8 m sur des surfaces d'application de 200 mm x 200 mm. ⁵⁾ Selon leur utilisation, les toits accessibles aux personnes et aux véhicules seront considérés comme des surfaces des catégories A à G.				

ANNEXE C COEFFICIENTS DE FORCE ET DE PRESSION POUR LE VENT

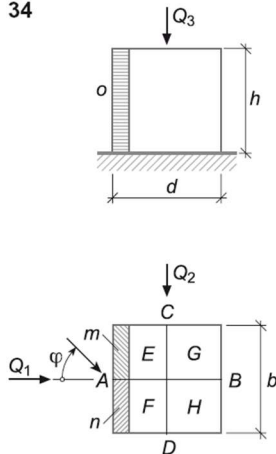
Figure 18: Définition des coefficients de pression, des surfaces des bâtiments et des directions des forces



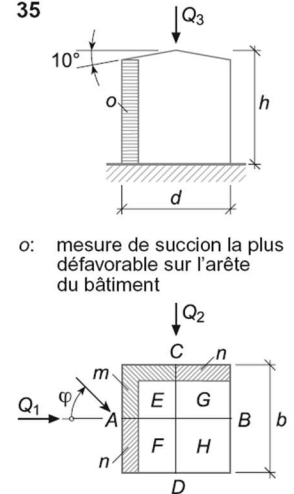
Surfaces localisées m, n, o Surfaces soumises à une sollicitation locale élevée. Leurs forces ne doivent pas être superposées aux forces agissant sur les grandes surfaces.

$\hat{c}_{pe}$ Coefficients pour le calcul des pressions maximales qui peuvent agir pendant une courte durée sur des zones sensibles d'une construction (vitres, tuiles et leur fixation).

34



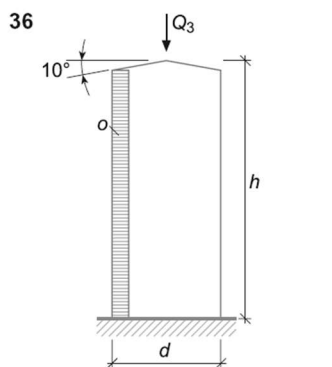
35

Tableau 34: Coefficients pour $h : b : d = 1 : 1 : 1$, toit plat

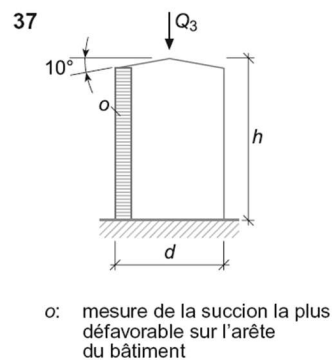
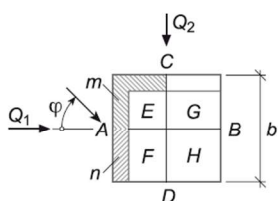
φ	Coefficients de pression																Coefficients de force		
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence		
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	b · h	d · h	d · b
0°	0,75	-0,3	-0,75	-0,75	-1,05	-1,05	-0,45	-0,45	-1,2	-1,2	-0,8	-0,35	0,75	-0,3	-0,8	-0,8	1,05	0	-0,75
15°	0,6	-0,35	-0,5	-0,55	-1,05	-0,8	-0,3	-0,4	-1,2	-1,0	-0,9	-0,25	0,6	-0,35	-0,6	-0,35	0,95	0,05	-0,64
45°	0,35	-0,45	0,35	-0,45	-1,05	-0,6	-0,6	-0,25	-1,5	-0,7	-0,65	±0,1	0,35	-0,45	0,35	-0,45	0,8	0,8	-0,63
90°	-0,75	-0,75	0,75	-0,3	-1,05	-0,45	-1,05	-0,45	-1,8	-0,6	0,55	-0,35	-0,8	-0,8	0,75	-0,3	0	1,05	-0,75
									$\hat{C}_{pe} = -2,0$								$C_{fr} = 0$		

Tableau 35: Coefficients pour $h : b : d = 1 : 1 : 1$, pente du toit 10°

φ	Coefficients de pression																Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence			
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,96}{d} \cdot h$	$d \cdot b$	
0°	0,75	-0,3	-0,75	-0,75	-1,05	-1,05	-0,4	-0,4	-1,7	-1,7	-0,8	-0,3	0,75	-0,35	-0,75	-0,75	0,9	0	-0,73	
15°	0,6	-0,4	-0,5	-0,55	-1,05	-0,9	-0,35	-0,4	-1,7	-1,7	-0,85	-0,2	0,55	-0,4	-0,45	-0,55	0,86	0,05	-0,68	
45°	0,4	-0,45	0,4	-0,45	-1,05	-0,6	-0,6	-0,35	-1,9	-0,7	-0,65	±0,1	0,45	-0,45	0,45	-0,45	0,74	0,85	-0,65	
90°	-0,75	-0,75	0,75	-0,3	-1,05	-0,4	-1,05	-0,4	-1,7	-1,7	-0,55	-0,3	-0,75	-0,75	0,75	-0,35	0	1,05	-0,73	
									$\hat{c}_{pe} = -2,0$									$c_{fr} = 0$		



o: mesure de la succion la plus défavorable sur l'arête du bâtiment



o: mesure de la succion la plus défavorable sur l'arête du bâtiment

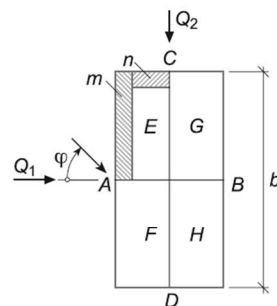
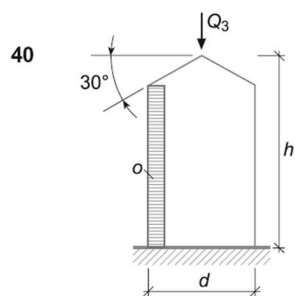


Tableau 36: Coefficients pour $h : b : d = 2,5 : 1 : 1$, pente du toit 10°

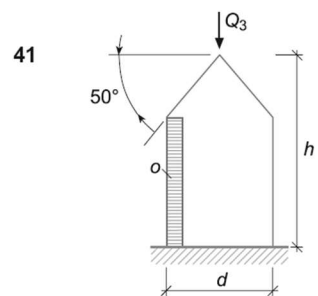
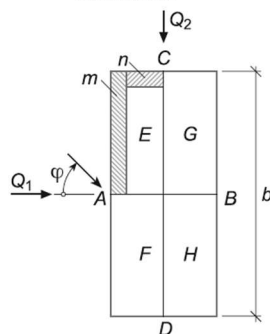
φ	Coefficients de pression																Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence			
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,98}{d \cdot h}$	$d \cdot b$	
0°	0,85	−0,5	−1,0	−1,0	−1,3	−1,3	−0,5	−0,5	−1,55	−1,55	−1,2	−0,5	0,85	−0,5	−1,1	−1,1	1,27	0	−0,9	
15°	0,6	−0,5	−0,7	−0,8	−1,05	−1,0	−0,45	−0,5	−1,4	−1,5	−0,9	−0,4	0,65	−0,65	−0,75	−0,9	1,04	0,1	−0,75	
45°	0,35	−0,6	0,35	−0,6	−1,5	−0,65	−0,75	−0,45	−1,9	−1,1	−0,7	−0,15	0,35	−0,65	0,35	−0,65	0,9	0,95	−0,84	
90°	−1,0	−1,0	0,85	−0,5	−1,3	−0,7	−1,3	−0,7	−1,55	−0,9	−1,2	−0,5	−1,1	−1,1	0,85	−0,5	0	1,35	−1,0	
									$\hat{C}_{pe} = -2,0$									$c_{fr} = 0$		

Tableau 37: Coefficients pour $h : b : d = 1,5 : 2 : 1$, pente du toit 10°

φ	Coefficients de pression																Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence			
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,97}{d \cdot h}$	$d \cdot b$	
0°	0,8	-0,4	-0,85	-0,85	-1,1	-1,1	-0,5	-0,5	-1,3	-0,85	-0,9	-0,35	0,8	-0,4	-0,85	-0,85	1,09	0	-0,8	
15°	0,55	-0,4	-0,8	-0,75	-1,05	-0,95	-0,5	-0,55	-1,2	-0,7	-0,85	-0,35	0,55	-0,4	-0,8	-0,65	0,87	-0,05	-0,76	
45°	0,35	-0,5	0,35	-0,55	-1,0	-0,7	-0,7	-0,4	-1,3	-1,1	-0,65	-0,15	0,25	-0,55	0,35	-0,55	0,78	0,9	-0,7	
90°	-0,55	-0,55	0,85	-0,25	-1,05	-0,2	-1,05	-0,2	-0,65	-1,2	-0,5	$\pm 0,1$	-0,3	-0,3	0,85	-0,25	0	1,1	-0,63	
									$\hat{C}_{pe} = -2,0$									$C_{fr} = 0$		



o: mesure de la succion la plus défavorable sur l'arête du bâtiment



o: mesure de la succion la plus défavorable sur l'arête du bâtiment

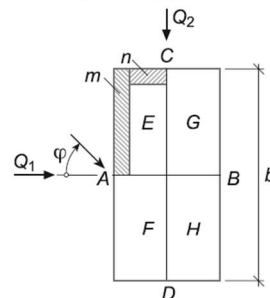


Tableau 40: Coefficients pour $h : b : d = 2 : 2,5 : 1$, pente du toit 30°

φ	Coefficients de pression																Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence			
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,93}{d \cdot h}$	$d \cdot b$	
0°	0,8	-0,6	-0,95	-0,95	-0,45	-0,45	-0,55	-0,55	-0,65	-0,65	-0,9	-0,4	0,8	-0,65	-0,9	-0,9	1,21	0	-0,5	
15°	0,6	-0,55	-0,65	-0,75	-0,25	-0,45	-0,55	-0,65	-0,65	-0,65	-1,1	-0,3	0,6	-0,55	-0,85	-0,75	1,02	0,1	-0,48	
45°	0,4	-0,55	0,4	-0,6	-0,3	-0,4	-0,8	-0,7	-0,6	-0,75	-0,6	0,1	0,4	-0,55	0,35	-0,6	0,87	1,0	-0,55	
90°	-0,6	-0,6	0,85	-0,25	-0,8	-0,3	-0,8	-0,3	-1,1	-1,1	-0,55	-0,15	-0,55	-0,55	0,85	-0,25	0	1,1	-0,55	
$\hat{C}_{pe} = -2,0$																		$C_{fr} = 0$		

Tableau 41: Coefficients pour $h : b : d = 2 : 2 : 1$, pente du toit 50°

φ	Coefficients de pression																Coefficients de force			
	C_{pe}								C_{pe}			C_{pi}					C_{f1}	C_{f2}	C_{f3}	
	Surface d'application								Surface localisée			Ouvertures prépondérantes sur les côtés					Surface de référence			
	A	B	C	D	E	F	G	H	m	n	o	rép.	A	B	C	D	$b \cdot h$	$\frac{0,85}{d \cdot h}$	$d \cdot b$	
0°	0,8	-0,85	-0,95	-0,95	0,5	0,5	-0,6	-0,6	0,6	-0,3	-0,9	-0,5	0,8	-0,8	-1,0	-1,0	1,49	0	-0,05	
15°	0,6	-0,7	-0,7	-0,8	0,55	0,4	-0,65	-0,6	0,65	0,5	-0,9	-0,35	0,55	-0,75	-0,8	-0,75	1,24	0,1	-0,08	
45°	0,35	-0,65	0,3	-0,6	0,3	±0,1	-0,6	-0,6	0,45	0,55	-0,9	0,1	0,35	-0,5	0,3	-0,6	0,94	0,9	-0,25	
90°	-0,55	-0,55	0,85	-0,25	-0,7	-0,3	-0,7	-0,3	-0,75	-0,8	-0,5	-0,3	-0,55	-0,55	0,75	-0,2	0	1,1	-0,5	
$\hat{C}_{pe} = -2,0$																		$C_{fr} = 0$		

Tableau 73: Coefficients pour profilés

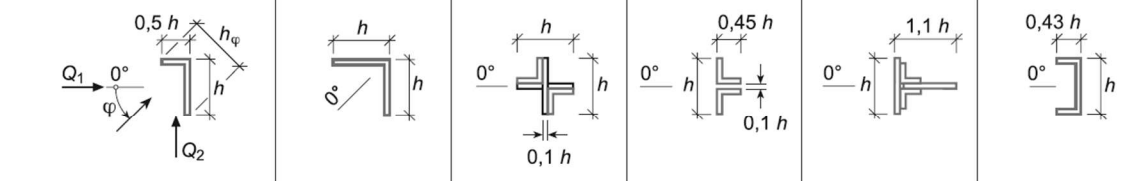
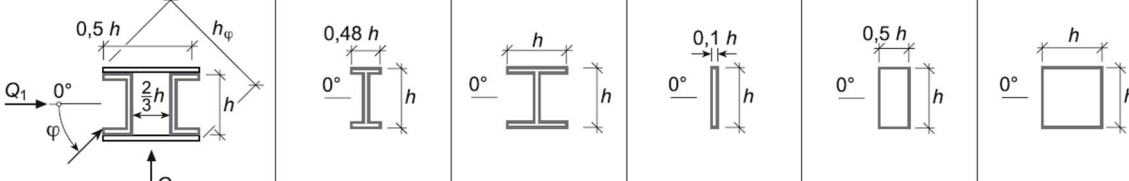
φ	Coefficients de force											
	Surface de référence = $h \cdot l$ (l = longueur de profilé)											
	c_{f1}	c_{f2}	c_{f1}	c_{f2}	c_{f1}	c_{f2}	c_{f1}	c_{f2}	c_{f1}	c_{f2}	c_{f1}	c_{f2}
0°	1,9	0,95	1,8	1,8	1,75	0,1	1,6	0	2,0	0	2,05	0
45°	1,8	0,8	2,1	1,8	0,85	0,85	1,5	-0,1	1,2	0,9	1,85	0,6
90°	2,0	1,7	-1,9	-1,0	0,1	1,75	-0,95	0,7	-1,6	2,15	0	0,6
135°	-1,8	-0,1	-2,0	0,3	-0,75	0,75	-0,5	1,05	-1,1	2,4	-1,6	0,4
180°	-2,0	0,1	-1,4	-1,4	-1,75	-0,1	-1,5	0	-1,7	$\pm 2,1$	-1,8	0
												
0°	1,4	0	2,05	0	1,6	0	2,0	0	2,1	0	2,0	0
45°	1,2	1,6	1,95	0,6	1,5	1,5	1,8	0,1	1,4	0,7	1,55	1,55
90°	0	2,2	$\pm 0,5$	0,9	0	1,9	0	0,1	0	0,75	0	2,0
												
Facteur de réduction tenant compte de l'éclatement												
$l : h_\varphi$ resp. $l : h$						5	10	20	35	50	100	∞
c_{red}						0,6	0,65	0,75	0,85	0,9	0,95	1,0

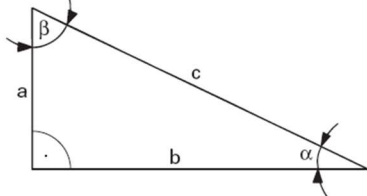
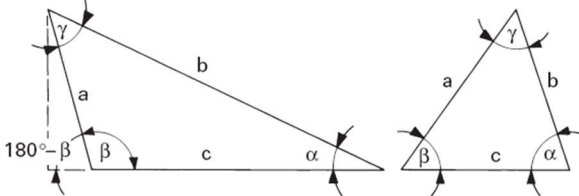
Tableau 74: Coefficients pour fils, barres, tubes et câbles. $l : b \geq 100 : 1$; facteur de réduction selon le tableau 73, q_p en kN/m^2

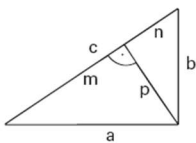
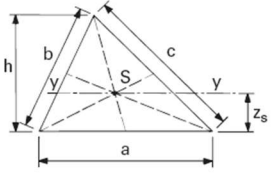
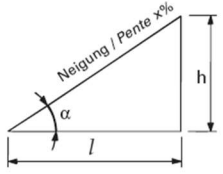
$d\sqrt{q_p}$	Coefficients de force c_f			
	Surface de référence = $d \cdot l$ (d = diamètre, l = longueur, les deux en m)			
$\leq 0,3$	1,2	1,2	1,2	1,3
$> 0,3$	0,5	0,7	0,9	1,1
	 fils et barres lisses, tubes	 fils et barres peu rugueux	 câbles conducteurs ou porteurs à torons fins	 câbles conducteurs ou porteurs à gros torons

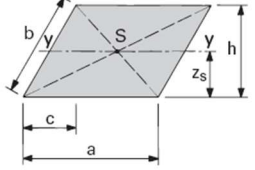
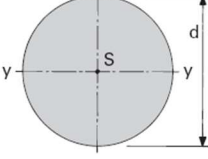
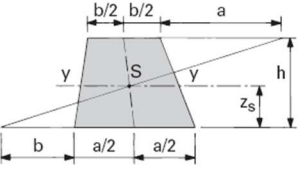
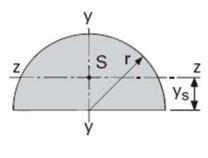
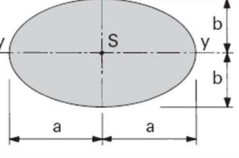
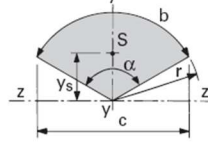
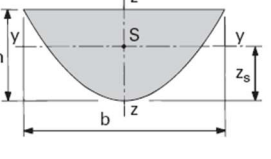
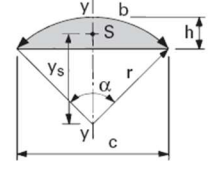
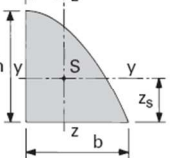
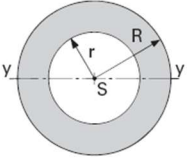
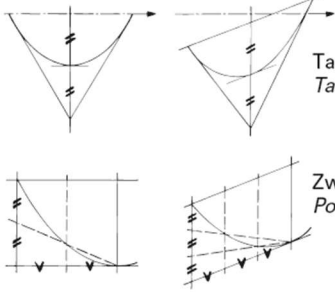
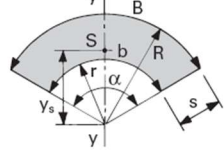
FORMULAIRES

Trigonometrie

Trigonométrie

Rechtwinklige Dreiecke <i>Triangles rectangles</i>			Schiefwinklige Dreiecke <i>Triangles quelconques</i>		
					
Gesucht <i>Demandé</i>	Gegeben <i>Donné</i>	Lösung <i>Formule</i>	Gesucht <i>Demandé</i>	Gegeben <i>Donné</i>	Lösung <i>Formule</i>
a	c α	$a = c \cdot \sin \alpha$	a	b α β	$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
	c β	$a = c \cdot \cos \beta$		c α γ	$a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$
	b α	$a = b \cdot \tan \alpha$	b	a β α	$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$
	b β	$a = b \cdot \cot \beta = b \cdot \tan (90^\circ - \beta)$		c β γ	$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$
	b c	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	c	a γ α	$c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$
b	c β	$b = c \cdot \sin \beta$		a α β	$c = a \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$
	c α	$b = c \cdot \cos \alpha$		b α a	$c = b \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin^2 \alpha}$
	a β	$b = a \cdot \tan \beta$		a b γ	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a \cdot b \cdot \cos \gamma}$
	a α	$b = a \cdot \cot \alpha$		a b γ	$c = \sqrt{(a + b)^2 - 4 a \cdot b \cdot \cos^2 \gamma / 2}$
	a c	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	α	a b c	$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b \cdot c}$
c	a α	$c = a / \sin \alpha$		a b γ	$\tan \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{b - a \cdot \cos \gamma}$
	b β	$c = b / \sin \beta$	β	a b α	$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$
	a β	$c = a / \cos \beta$		γ	α β
	b α	$c = b / \cos \alpha$			
	a b	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$			
α	a c	$\sin \alpha = a / c$			
	b c	$\cos \alpha = b / c$			
	a b	$\tan \alpha = a / b$			
	b a	$\cot \alpha = b / a$			
β	b c	$\sin \beta = b / c$			
	a c	$\cos \beta = a / c$			
	b a	$\tan \beta = b / a$			

Rechtwinkliges Dreieck <i>Triangle rectangle</i>	Dreieck <i>Triangle</i>	Neigung <i>Pente</i>
 $m \cdot n = p^2$ $a^2 + b^2 = c^2$	 $A = \frac{a \cdot h}{2}$ $z_s = \frac{h}{3}$ $I_y = \frac{ah^3}{36}$	 $\tan \alpha = \frac{h}{l}$ $h = l \cdot \frac{x \%}{100}$ $l = h \cdot \frac{100}{x \%}$

Parallelogramm 	Parallélogramme $A = a \cdot h$ $h = \sqrt{b^2 - c^2}$ $z_s = \frac{h}{2}$ $I_y = \frac{a \cdot h^3}{12}$	Kreis 	Cercle $A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,7854 d^2$ $U = \pi \cdot d$ $I_y = \frac{\pi d^4}{64}$
Trapez 	Trapèze $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $z_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $I_y = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2+b^2+4ab}{a+b}$	Halbkreis 	Demi-cercle $A = \frac{\pi r^2}{2}$ $y_s = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244 r$ $I_y = \frac{\pi r^4}{128}$ $I_z = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$
Ellipse 	Ellipse $A = a \cdot b \cdot \pi$ $U = a + b + 3 \sqrt{a^2 + b^2}$ $I_y = \pi \cdot a \cdot \frac{b^3}{4}$	Kreisausschnitt 	Secteur circulaire $A = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{\alpha r^2}{2}$ $b = \alpha \cdot r \quad c = 2 r \sin \alpha / 2$ $y_s = \frac{2r \cdot c}{3b} = \frac{4r}{3} \cdot \frac{\sin \alpha / 2}{\alpha}$ $I_y = \frac{r^4}{8} (\alpha - \sin \alpha)$ $I_z = \frac{r^4}{8} (\alpha + \sin \alpha)$
Parabelabschnitt 	Segment de parabole $A = \frac{2}{3} b \cdot h$ $z_s = \frac{3}{5} h$ $I_y = \frac{8}{175} b \cdot h^3$ $I_z = \frac{1}{30} h \cdot b^3$	Kreisabschnitt 	Segment de cercle $A = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$ $b = \alpha \cdot r \quad c = 2 r \sin \alpha / 2$ $h = r (1 - \cos \alpha / 2)$ $y_s = \frac{c^3}{12A}$ $I_y = \frac{r^4}{48} (6\alpha - 8\sin \alpha + \sin 2\alpha)$
Halber Parabelabschnitt 	Demi-segment de parab. $A = \frac{2}{3} b \cdot h$ $y_s = \frac{3}{8} b \quad z_s = \frac{2}{5} h$ $I_y = \frac{8}{175} b \cdot h^3$ $I_z = \frac{19}{480} h \cdot b^3$	Kreisring 	Couronne $A = \pi (R^2 - r^2)$ $I_y = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$
Parabel Geometrische Eigenschaften 	Paraboles Propriétés géométriques Tangenten Tangentes Zwischenpunkte Points intermédiaires	Kreisringausschnitt 	Secteur de couronne $A = \frac{B+b}{2} \cdot s$ $B = \alpha \cdot R \quad b = \alpha \cdot r$ $y_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r} \cdot \frac{\sin \alpha / 2}{\alpha}$ $I_y = \frac{(R^4 - r^4)}{8} (\alpha - \sin \alpha)$

A Fläche/Aire

U Umfang/Périmètre

S Schwerpunkt/Centre de gravité

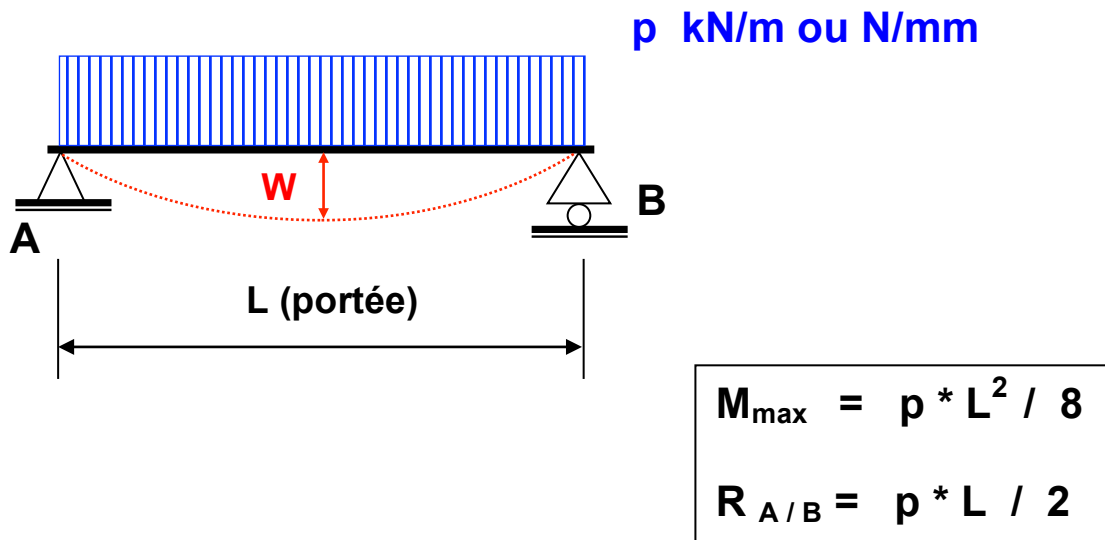
α in Radian (360° = 2 π [rad]) / en radians (360° = 2 π [rad])

I Trägheitsmoment / Moment d'inertie

FORMULAIRE POUR LE CALCUL DES POUTRES COURANTES

→ voir également formulaire de statique annexé au cours

Poutre simple avec charge répartie



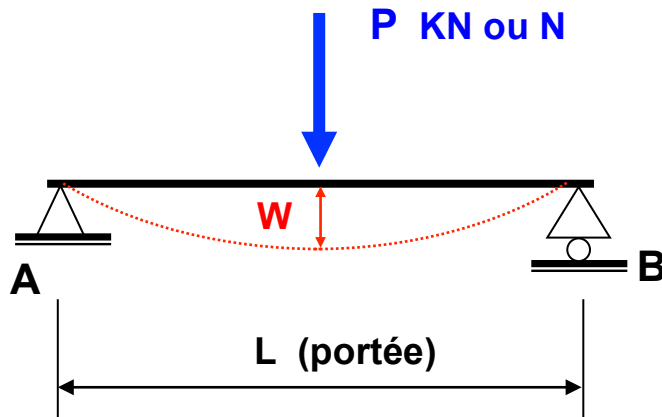
$$W = \frac{5 * p * L^4}{384 * E_{\text{matériau}} * \text{Inertie}}$$

Exemple : Poutre simple en bois sur 2 appuis, portée 5'000 mm
Charge répartie de 30 kN/m
Section du bois 550 x 300 mm
 $E_{\text{bois}} = 11'000 \text{ N/mm}^2$

Inertie de la poutre = $550^3 * 300 / 12 = 4.16 \text{ 1E9 mm}^4$

$w = 5 * 30 * 5'000^4 / (384 * 11'000 * 4.16 \text{ 1E9}) = \mathbf{5.33 \text{ mm}}$

Poutre simple avec charge concentrée à L/2



$$M_{\max} = P * L / 4$$

$$R_{A/B} = P / 2$$

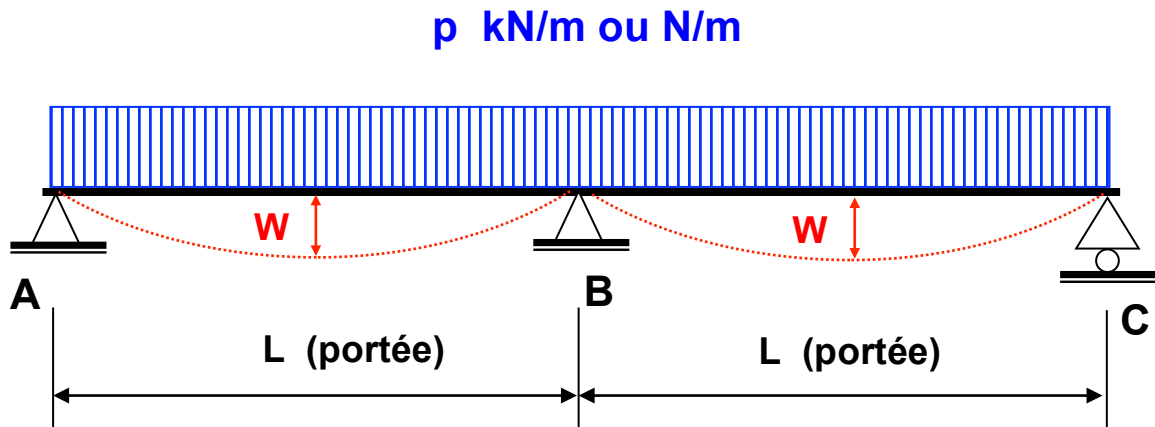
$$W = \frac{1 * P \text{ (en N !)} * L^3}{48 * E_{\text{matériau}} * \text{Inertie}}$$

Exemple : Poutre simple en bois sur 2 appuis, portée 5000 mm
Charge concentrée au centre de 150 kN
Section du bois 550 x 300 mm
 $E_{\text{bois}} = 11'000 \text{ N/mm}^2$

$$\text{Inertie de la poutre} = 550^3 * 300 / 12 = 4.16 \text{ E9 mm}^4$$

$$\text{Déformation} = 150'000 * 5'000^3 / (48 * 11'000 * 4.16 \text{ 1E9}) = \mathbf{8.47 \text{ mm}}$$

Poutre continue à 2 travées avec charge répartie



$$M_{\text{max sur appuis B}} = - 0.125 * p * L^2$$

$$M_{\text{travée}} = + 0.070 * p * L^2$$

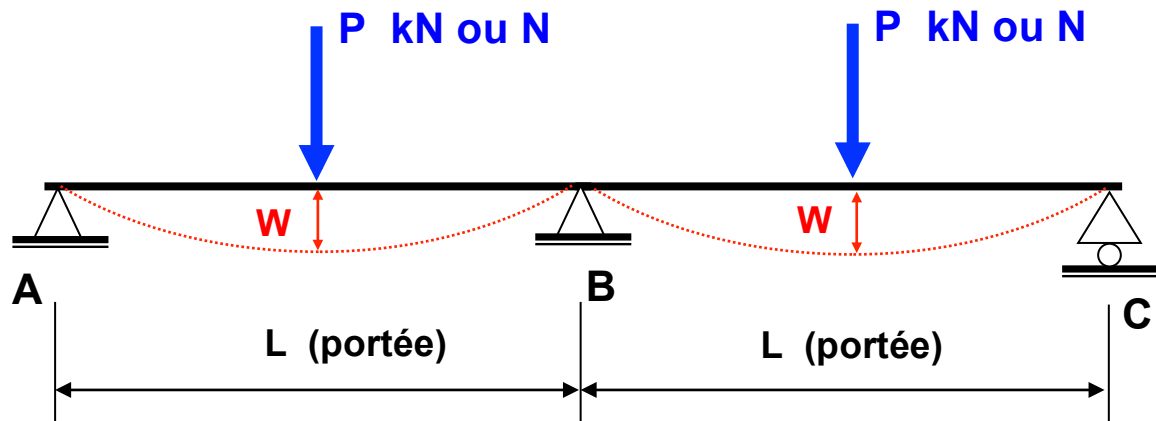
$$V_{\text{max appuis B}} = 0.625 * p * L$$

$$R_A = R_C = 0.375 * p * L$$

$$R_B = 1.250 * p * L$$

$$w = \frac{1 * p * L^4}{185 * E_{\text{matériau}} * \text{Inertie}}$$

Poutre continue à 2 travées avec charges concentrées à L/2



$$M_{\text{max sur appuis B}} = - 0.188 * P * L$$

$$M_{\text{travée}} = + 0.156 * P * L$$

$$V_{\text{max appuis B}} = 0.688 * P * L$$

$$R_A = R_C = 0.312 * P$$

$$R_B = 1.375 * P$$

$$W = \frac{1 * P \text{ (en N!)} * L^3}{108 * E_{\text{matériau}} * \text{Inertie}}$$

FORMULAIRE DE STATIQUE ELEMENTAIRE

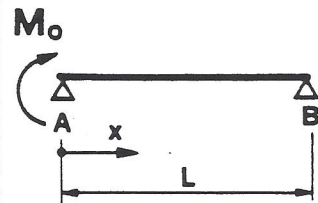
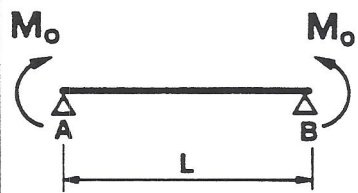
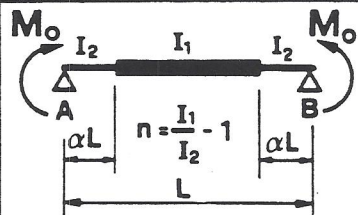
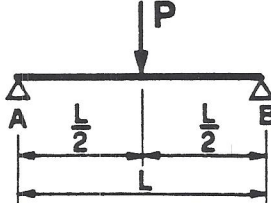
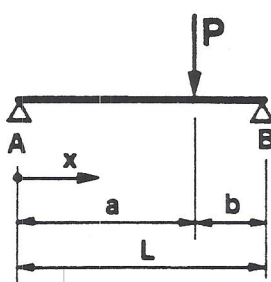
Convention de signe

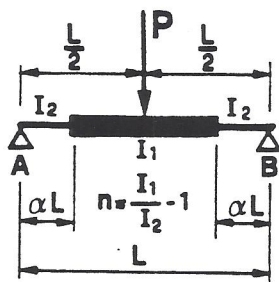
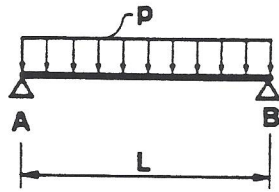
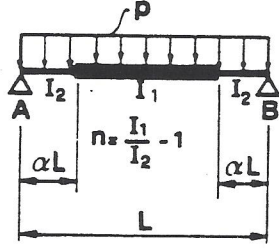
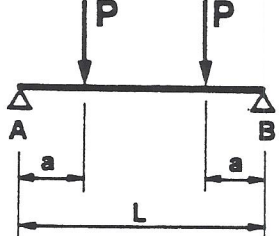
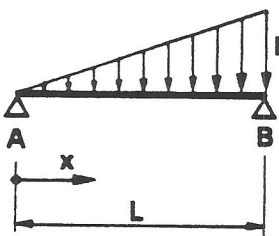
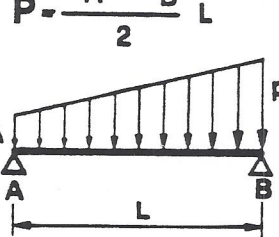
Réaction d'appui R : positive vers le haut

Moment fléchissant M : positif s'il tend les fibres inférieures

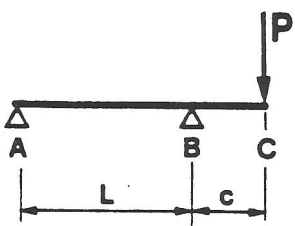
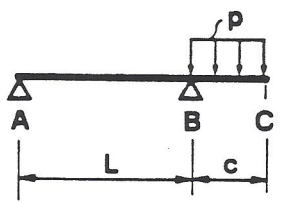
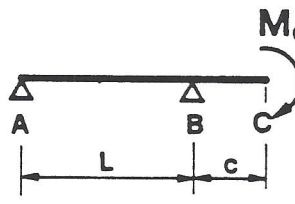
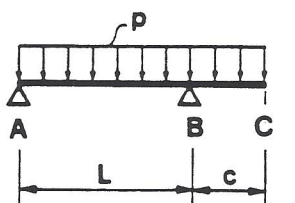
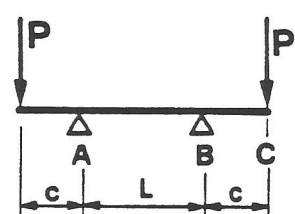
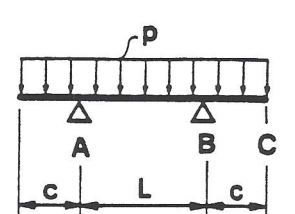
Flèche f : positive vers le bas

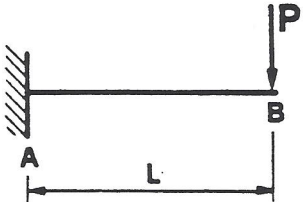
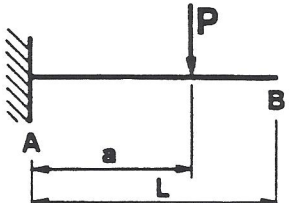
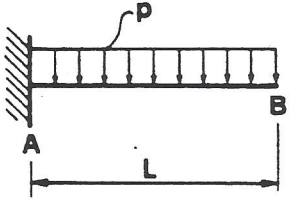
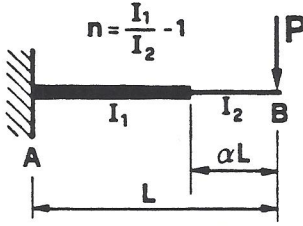
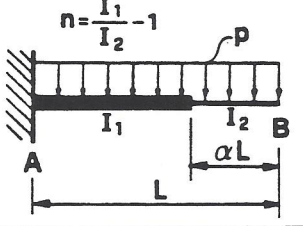
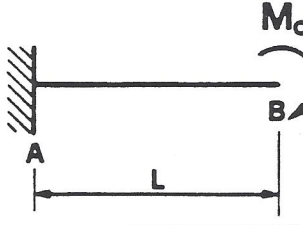
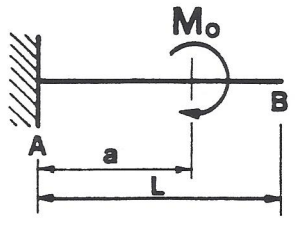
Angle de rotation φ : positif dans le sens trigonométrique

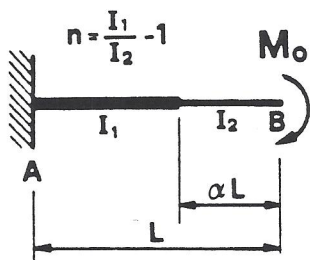
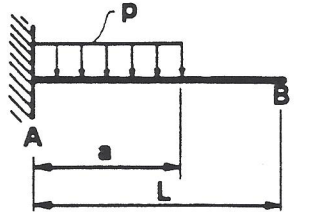
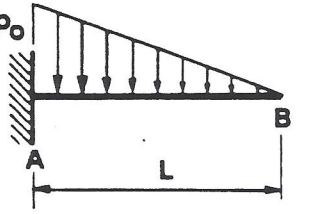
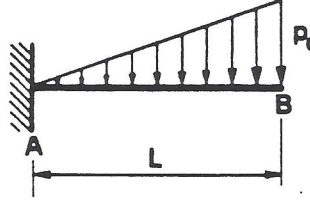
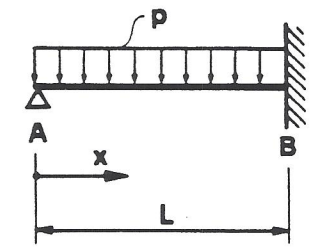
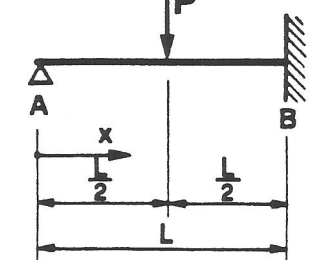
POUTRE À DEUX APPUIS				
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$-R_A = R_B = \frac{M_0}{L}$	$M_A = M_0$	$f_{\max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$ pour $x = L - \frac{L}{\sqrt{3}}$ $f_{(\frac{L}{2})} = \frac{M_0 L^2}{16EI}$	$\varphi_A = -\frac{M_0 L}{3EI}$ $\varphi_B = \frac{M_0 L}{6EI} = -\frac{\varphi_A}{2}$
	$R_A = R_B = 0$	$M_A = M_B = M(\frac{L}{2}) = M_0$	$f_{\max} = f(\frac{L}{2}) = \frac{M_0 L^2}{8EI}$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{M_0 L}{2EI}$
	$R_A = R_B = 0$	$M_A = M_B = M(\frac{L}{2}) = M_0$	$f_{\max} = f(\frac{L}{2}) = \frac{M_0 L^2}{8EI_1} (1 + 4\alpha^2 n)$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{M_0 L}{2EI_1} (1 + 2\alpha n)$
	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$	$M_{\max} = M_P = \frac{PL}{4}$	$f_{\max} = f_P = \frac{PL^3}{48EI}$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{PL^2}{16EI}$
	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$	$M_{\max} = M_P = \frac{Pab}{L}$	$f_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{9EIL} \times \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ pour $a > b$, en $x = \sqrt{\frac{1}{3}(L^2 - b^2)}$ $f_P = \frac{Pa^2 b^2}{3EIL}$	$\varphi_A = -\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$ $\varphi_B = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$

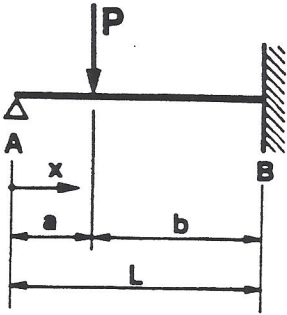
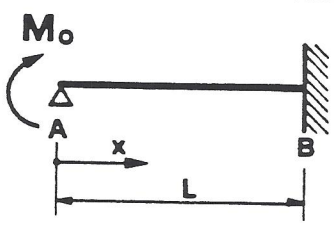
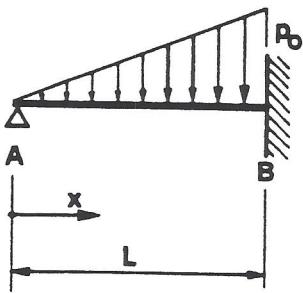
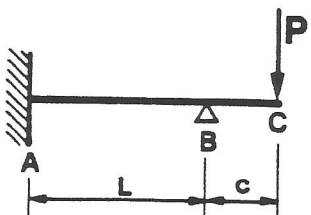
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$	$M_{\max} = M_P = \frac{PL}{4}$	$f_{\max} = f_P = \frac{PL^3}{48EI_1} (1 + 8\alpha^3 n) = \frac{PL^2}{16EI_1} (1 + 4\alpha^2 n)$	$-\varphi_A = \varphi_B =$
	$R_A = R_B = \frac{pL}{2}$	$M_{\max} = M(\frac{L}{2}) = \frac{pL^2}{8}$	$f_{\max} = f(\frac{L}{2}) = \frac{5pL^4}{384EI}$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{pL^3}{24EI}$
	$R_A = R_B = \frac{pL}{2}$	$M_{\max} = M(\frac{L}{2}) = \frac{pL^2}{8}$	$f_{\max} = f(\frac{L}{2}) = \frac{5pL^4}{384EI_1} \times (1 + 12,8\alpha^3 n - 9,6\alpha^4 n)$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{pL^3}{24EI_1} \times (1 + 6\alpha^2 n - 4\alpha^3 n)$
	$R_A = R_B = P$	$M_{\max} = M_P = Pa$	$f_P = \frac{Pa^2(3L-4a)}{6EI}$ $f_{\max} = f(\frac{L}{2}) = \frac{Pa(3L^2-4a^2)}{24EI}$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pa(L-a)}{2EI}$
	$R_A = \frac{p_0 L}{6}$ $R_B = \frac{p_0 L}{3}$	$M_{\max} = \frac{p_0 L^2}{9\sqrt{3}}$ en $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$	$f_{\max} = \frac{p_0 L^4}{153,4EI} = 0,00652 \frac{p_0 L^4}{EI}$ en $x = 0,51933L$	$\varphi_A = -\frac{7p_0 L^3}{360EI}$ $\varphi_B = \frac{8p_0 L^3}{360EI} = \frac{p_0 L^3}{45EI}$
	$R_A = \frac{L}{6} (2p_A + p_B)$ $R_B = \frac{L}{6} (p_A + 2p_B)$	$0,125PL \leq M_{\max} \leq 0,128PL$	$0,01302 \frac{PL^3}{EI} \leq f_{\max} \leq 0,01304 \frac{PL^3}{EI}$	$0,03889 \frac{PL^2}{EI} \leq \varphi_B \leq 0,4444 \frac{PL^2}{EI}$ idem pour $ \varphi_A $

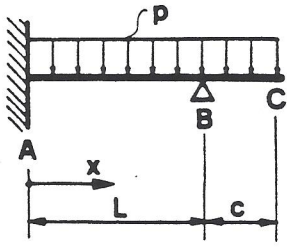
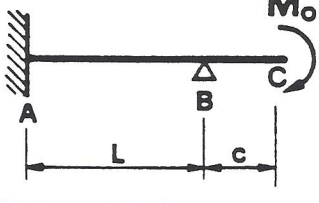
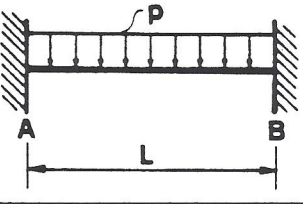
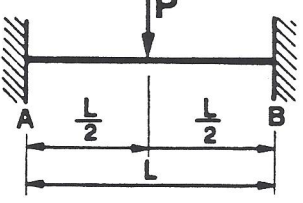
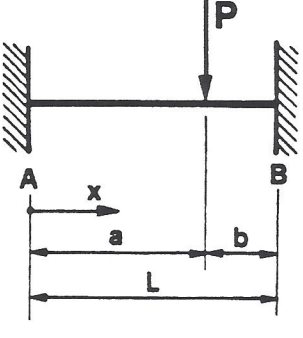
POUTRE À DEUX APPUIS AVEC PORTE-À-FAUX

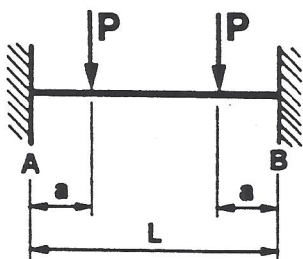
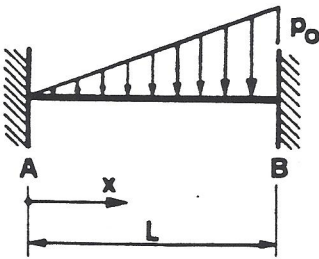
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = -\frac{Pc}{L}$ $R_B = \frac{P(L+c)}{L}$	$M_B = -Pc$	$f_C = \frac{Pc^2(L+c)}{3EI}$	$\varphi_A = \frac{PcL}{6EI}$ $\varphi_B = -\frac{PcL}{3EI}$ $\varphi_C = -\frac{Pc(2L+3c)}{6EI}$
	$R_A = -\frac{pc^2}{2L}$ $R_B = \frac{pc(2L+c)}{2L}$	$M_B = -\frac{pc^2}{2}$	$f_C = \frac{pc^3(4L+3c)}{24EI}$	$\varphi_A = \frac{pc^2L}{12EI}$ $\varphi_B = -\frac{pc^2L}{6EI}$ $\varphi_C = -\frac{pc^2(L+c)}{6EI}$
	$R_A = -\frac{M_0}{L}$ $R_B = \frac{M_0}{L}$	$M_B = -M_0$	$f_C = \frac{M_0c(2L+3c)}{6EI}$	$\varphi_A = \frac{M_0L}{6EI}$ $\varphi_B = -\frac{M_0L}{3EI}$ $\varphi_C = -\frac{M_0(L+3c)}{3EI}$
	$R_A = \frac{p(L^2-c^2)}{2L}$ $R_B = \frac{p(L+c)^2}{2L}$	$M_B = -\frac{pc^2}{2}$	$f_C = \frac{pc(L+c)}{24EI} \times (3c^2+cL-L^2)$	$\varphi_A = -\frac{pL(L^2-2c^2)}{24EI}$ $\varphi_B = \frac{pL(L^2-4c^2)}{24EI}$ $\varphi_C = \frac{p}{24EI} \times (L^3-4c^3-4c^2L)$
	$R_A = R_B = P$	$M_A = M_B = -Pc$	$f_C = \frac{Pc^2(3L+2c)}{6EI}$ $f_{(\frac{L}{2})} = -\frac{PcL^2}{8EI}$	$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{PcL}{2EI}$ $\varphi_C = -\frac{Pc(L+c)}{2EI}$
	$R_A = R_B = \frac{p(L+2c)}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{pc^2}{2}$ $M_{(\frac{L}{2})} = \frac{p(L^2-4c^2)}{8}$	$f_C = \frac{pc^4}{24EI} \times \left(3+6\frac{L}{c}-\frac{L^3}{c^3}\right)$ $f_{(\frac{L}{2})} = \frac{pL^2}{384EI} \times (5L^2-24c^2)$	$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{pL(L^2-6c^2)}{24EI}$ $\varphi_C = \frac{p}{24EI} \times (L^3-4c^3-6c^2L)$

POUTRE ENCASTRÉE				
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = P$	$M_A = - PL$	$f_B = \frac{PL^3}{3EI}$	$\varphi_B = - \frac{PL^2}{2EI}$
	$R_A = P$	$M_A = - Pa$	$f_B = \frac{Pa^2(3L-a)}{6EI}$	$\varphi_B = - \frac{Pa^2}{2EI}$
	$R_A = pL$	$M_A = - \frac{pL^2}{2}$	$f_B = \frac{pL^4}{8EI}$	$\varphi_B = - \frac{pL^3}{6EI}$
	$R_A = P$	$M_A = - PL$	$f_B = \frac{PL^3}{3EI_1}(1+n\alpha^3)$	$\varphi_B = - \frac{PL^2}{2EI_1} \times (1+n\alpha^2)$
	$R_A = pL$	$M_A = - \frac{pL^2}{2}$	$f_B = \frac{pL^4}{8EI_1}(1+n\alpha^4)$	$\varphi_B = - \frac{pL^3}{6EI_1} \times (1+n\alpha^3)$
	$R_A = 0$	$M_A = - M_0$	$f_B = \frac{M_0 L^2}{2EI}$	$\varphi_B = - \frac{M_0 L}{EI}$
	$R_A = 0$	$M_A = - M_0$	$f_B = \frac{M_0 a(2L-a)}{2EI}$	$\varphi_B = - \frac{M_0 a}{EI}$

Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = 0$	$M_A = -M_0$	$f_B = \frac{M_0 L^2}{2EI_1} (1 + n\alpha^2)$	$\varphi_B = -\frac{M_0 L}{EI_1} (1 + n\alpha)$
	$R_A = pa$	$M_A = -\frac{pa^2}{2}$	$f_B = \frac{pa^3(4L-a)}{24EI}$	$\varphi_B = -\frac{pa^3}{6EI}$
	$R_A = \frac{p_0 L}{2}$	$M_A = -\frac{p_0 L^2}{6}$	$f_B = \frac{p_0 L^4}{30EI}$	$\varphi_B = -\frac{p_0 L^3}{24EI}$
	$R_A = \frac{p_0 L}{2}$	$M_A = -\frac{p_0 L^2}{3}$	$f_B = \frac{11p_0 L^4}{120EI}$	$\varphi_B = -\frac{p_0 L^3}{8EI}$
POUTRE ENCASTRÉE - APPUYÉE				
	$R_A = \frac{3}{8} pL$ $R_B = \frac{5}{8} pL$	$M_B = -\frac{pL^2}{8}$ $M_{\max}^{\oplus} = \frac{9pL^2}{128}$ pour $x = \frac{3}{8} L$	$f_{\max} \approx \frac{pL^4}{185EI}$ pour $x = 0,4215L$	$\varphi_A = -\frac{pL^3}{48EI}$
	$R_A = \frac{5}{16} P$ $R_B = \frac{11}{16} P$	$M_B = -\frac{3}{16} PL$ $M_P = \frac{5}{32} PL$	$f_P = \frac{7PL^3}{768EI}$ $f_{\max} = \frac{PL^3}{48\sqrt{5}EI}$ pour $x = \frac{L}{\sqrt{5}}$	$\varphi_A = -\frac{PL^2}{32EI}$

Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = \frac{Pb^2(3L-b)}{2L^3}$ $R_B = \frac{Pa(3L^2-a^2)}{2L^3}$	$M_B = -\frac{Pa(L^2-a^2)}{2L^2}$ $M_P = \frac{Pab^2(3L-b)}{2L^3}$	$f_P = \frac{Pa^2b^3(3L+a)}{12EIL^3}$ $f_{\max} = f_P \text{ quand } a = (\sqrt{2}-1)L = 0,414L$ si $a \leq 0,414L$: $f_{\max} = \frac{Pab^2}{6EI} \sqrt{\frac{a}{2L+a}}$ en $x = L\sqrt{\frac{a}{2L+a}}$ si $a \geq 0,414L$: $f_{\max} = \frac{Pa}{3EI} \times \frac{(L^2-a^2)^3}{(3L^2-a^2)^2}$ en $x = L\frac{L^2+a^2}{3L^2-a^2}$	$\varphi_A = -\frac{Pab^2}{4EIL}$
	$R_A = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$ $R_B = \frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$	$M_A = M_0$ $M_B = -\frac{1}{2} M_0$	$f_{\max} = \frac{M_0 L^2}{27EI}$ pour $x = \frac{1}{3} L$	$\varphi_A = -\frac{M_0 L}{4EI}$
	$R_A = \frac{p_0 L}{10}$ $R_B = \frac{2p_0 L}{5}$	$M_B = -\frac{p_0 L^2}{15}$ $M_{\max}^{\oplus} = \frac{p_0 L^2}{15\sqrt{5}} \approx \frac{3p_0 L^2}{100}$ pour $x = \frac{L}{\sqrt{5}}$	$f_{\max} = \frac{2p_0 L^4}{375\sqrt{5}EI} \approx \frac{p_0 L^4}{420EI}$ en $x = \frac{L}{\sqrt{5}}$	$\varphi_A = -\frac{p_0 L^3}{120EI}$
POUTRE ENCASTRÉE - APPUYÉE AVEC PORTE-À-FAUX				
	$R_A = -\frac{3Pc}{2L}$ $R_B = \frac{P(2L+3c)}{2L}$	$M_A = \frac{Pc}{2}$ $M_B = -Pc$	$f_C = \frac{Pc^2(3L+4c)}{12EI}$	$\varphi_B = -\frac{PcL}{4EI}$ $\varphi_C = -\frac{Pc(L+2c)}{4EI}$

Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = \frac{p(5L^2 - 6c^2)}{8L}$ $R_B = \frac{p}{8L} \times (3L^2 + 8cL + 6c^2)$	$M_A = -\frac{p(L^2 - 2c^2)}{8}$ $M_B = -\frac{pc^2}{2}$ $M_{\max}^{\oplus} = \frac{9pL^2}{128} + \frac{pc^2}{32} \left(9 \frac{c^2}{L^2} - 7 \right)$ $\text{en } x = \frac{5L^2 - 6c^2}{8L}$	$f_C = \frac{pc}{48EI} \times (6c^3 + 6c^2L - L^3)$	$\varphi_B = \frac{pL}{48EI} \times (L^2 - 6c^2)$ $\varphi_C = \frac{p}{48EI} \times (L^3 - 6c^2L - 8c^3)$
	$R_A = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$ $R_B = \frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$	$M_A = \frac{1}{2} M_0$ $M_B = -M_0$	$f_C = \frac{M_0c(L+2c)}{4EI}$	$\varphi_B = -\frac{M_0L}{4EI}$ $\varphi_C = -\frac{M_0(L+4c)}{4EI}$
POUTRE BI-ENCASTRÉE				
	$R_A = R_B = \frac{pL}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{pL^2}{12}$ $M_{\max}^{\ominus} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^2}{24}$	$f_{\max} = f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^4}{384EI}$	
	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{PL}{8}$ $M_P = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{8}$	$f_P = \frac{PL^3}{192EI}$	
	$R_A = \frac{P}{L^3} \times (L-a)^2(L+2a)$ $R_B = \frac{Pa^2(3L-2a)}{L^3}$	$M_A = -\frac{Pa(L-a)^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2(L-a)}{L^2}$ $M_P = \frac{2Pa^2(L-a)^2}{L^3}$	$f_P = \frac{Pa^3(L-a)^3}{3EIL^3}$ si $a > b$: $f_{\max} = \frac{2Pa^3b^2}{3EI(L+2a)^2}$ en $x = \frac{2aL}{L+2a}$ si $a < b$: $f_{\max} = \frac{2Pa^2(L-a)^3}{3EI(3L-2a)^2}$ en $x = \frac{L^2}{3L-2a}$	

Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = R_B = P$	$M_A = M_B = -\frac{Pa(L-a)}{L}$ $M_P = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pa^2}{L}$	$f_P = \frac{Pa^3(2L-3a)}{6EIL}$ $f_{\max} = f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pa^2(3L-4a)}{24EI}$	
	$R_A = \frac{3p_0 L}{20}$ $R_B = \frac{7p_0 L}{20}$	$M_A = -\frac{p_0 L^2}{30}$ $M_B = -\frac{p_0 L^2}{20}$ $M_{\max}^{\oplus} = \frac{p_0 L^2}{30} \left(3\sqrt{\frac{3}{10}} - 1\right)$ $= \frac{p_0 L^2}{46,65}$ pour $x = L\sqrt{\frac{3}{10}}$	$f_{\max} = \frac{p_0 L^4}{764EI}$ pour $x = 0,525L$	

FORMULAIRE DE STATIQUE - POUTRES CONTINUES 1

Belastungsfall	Max. Feldmomente (Faktor: pl^2)					Stützenmomente (Faktor: pl^2)			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_B	M_C	M_D	M_E
	0,0703	0,0703				-0,1250			
	0,0957					-0,0625			
	0,0800	0,0250	0,0800			-0,1000	-0,1000		
	0,1013		0,1013			-0,0500	-0,0500		
		0,0750				-0,0500	-0,0500		
	0,0735	0,0535				-0,1167	-0,0333		
	0,0939					-0,0667	+0,0167		

Belastungsfall	Max. Feldmomente (Faktor: pl^2)					Stützenmomente (Faktor: pl^2)			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_B	M_C	M_D	M_E
	0,0475	0,0475				-0,0781			
	0,0643					-0,0391			
	0,0540	0,0208	0,0540			-0,0625	-0,0625		
	0,0682		0,0682			-0,0312	-0,0312		
		0,0521				-0,0312	-0,0312		
	0,0497	0,0379				-0,0729	-0,0208		
	0,0632					-0,0416	+0,0104		

Auflagerkräfte (Faktor: pl)						Durchbiegung in Feldmitte $\delta = k \frac{pl^4}{EI} \cdot 10^{-3}$				
A	B_l B_r	C_l C_r	D_l D_r	E_l E_r	F	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0,3750	0,6250 0,6250	0,3750				0,521	0,521			
0,4375	0,5625 0,0625	-0,0625				0,912	-0,391			
0,4000	0,6000 0,5000	0,5000 0,6000	0,4000			0,677	0,052	0,677		
0,4500	0,5500 0	0 0,5500	0,4500			0,990	-0,625	0,990		
-0,0500	0,0500 0,5000	0,5000 0,0500	-0,0500			-0,313	0,677	-0,313		
0,3833	0,6167 0,5834	0,4166 0,0333	-0,0333			0,573	0,365	-0,208		
0,4333	0,5667 0,0834	-0,0834 -0,0167	0,0167			0,885	-0,313	0,104		

Auflagerkräfte (Faktor: pl)						Durchbiegung in Feldmitte $\delta = k \frac{pl^4}{EI} \cdot 10^{-3}$				
A	B_l B_r	C_l C_r	D_l D_r	E_l E_r	F	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0,1719	0,3281 0,3281	0,1719				0,345	0,345			
0,2109	0,2891 0,0391	-0,0391				0,589	-0,244			
0,1875	0,3125 0,2500	0,2500 0,3125	0,1875			0,443	0,052	0,443		
0,2188	0,2812 0	0 0,2812	0,2188			0,638	-0,391	0,638		
-0,0313	0,0313 0,2500	0,2500 0,0313	-0,0313			-0,195	0,443	-0,195		
0,1771	0,3229 0,3021	0,1979 0,0208	-0,0208			0,378	0,248	-0,130		
0,2084	0,2916 0,0520	-0,0520 -0,0104	0,0104			0,573	-0,195	0,065		

FORMULAIRE DE STATIQUE - POUTRES CONTINUES 2

Belastungsfall	Max. Feldmomente (Faktor: P/l)					Stützenmomente (Faktor: P)			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_B	M_C	M_D	M_E
	0,1562	0,1562				-0,1875			
	0,2031					-0,0938			
	0,1750	0,1000	0,1750			-0,1500	-0,1500		
	0,2125		0,2125			-0,0750	-0,0750		
		0,1750				-0,0750	-0,0750		
	0,1625	0,1375				-0,1750	-0,0500		
	0,2000					-0,1000	+0,0250		

Auflagerkräfte (Faktor: P)						Durchbiegung in Feldmitte $\delta = k \frac{Pl^3}{EI} \cdot 10^{-2}$			
A	B_l B_r	C_l C_r	D_l D_r	E_l E_r	F	k_1	k_2	k_3	k_4
0,3125	0,6875 0,6875	0,3125				0,911	0,911		
0,4062	0,5938 0,0938	-0,0938				1,497	-0,586		
0,3500	0,6500 0,5000	0,5000 0,6500	0,3500			1,146	0,208	1,146	
0,4250	0,5750 0	0 0,5750	0,4250			1,615	-0,937	1,615	
-0,0750	0,0750 0,5000	0,5000 0,0750	-0,0750			-0,469	1,146	-0,469	
0,3250	0,6750 0,6250	0,3750 0,0500	-0,0500			0,990	0,677	-0,312	
0,4000	0,6000 0,1250	-0,1250 -0,0250	0,0250			1,458	-0,469	0,156	

Belastungsfall	Max. Feldmomente (Faktor: P/l)					Stützenmomente (Faktor: P/l)			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_B	M_C	M_D	M_E
	0,2222	0,2222				-0,3333			
	0,2778					-0,1667			
	0,2444	0,0667	0,2444			-0,2667	-0,2667		
	0,2889		0,2889			-0,1333	-0,1333		
		0,2000				-0,1333	-0,1333		
	0,2296	0,2000				-0,3111	-0,0889		
	0,2740					-0,1778	+0,0444		

Auflagerkräfte (Faktor: P)						Durchbiegung in Feldmitte $\delta = k \frac{Pl^3}{EI} \cdot 10^{-2}$				
A	B_l B_r	C_l C_r	D_l D_r	E_l E_r	F	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0,6667	1,3333 1,3333	0,6667				1,466	1,466			
0,8333	1,1667 0,1667	-0,1667				2,508	-1,042			
0,7333	1,2667 1,0000	1,0000 1,2667	0,7333			1,883	0,216	1,883		
0,8667	1,1333 0	0 1,1333	0,8667			2,716	-1,667	2,716		
-0,1333	0,1333 1,0000	1,0000 0,1333	-0,1333			-0,833	1,883	-0,833		
0,6889	1,3111 1,2222	0,7778 0,0889	-0,0889			1,605	1,049	-0,566		
0,8222	1,1778 0,2222	-0,2222 -0,0444	0,0444			2,438	-0,833	0,278		